ارزیابی دانش معلمان و دانشجویان ریاضی در درس هندسه با استفاده از نظریه ون هیلی

ابراهیم ریحانی[1]، سید محمدرضا امام جمعه[2]، بهرام صالح صدق‌پور[3] و اصغر مرادی ویس[4]

چکیده: پژوهش حاضر با هدف ارزیابی دانش معلمان و دانشجویان ریاضی برای تدریس هندسه دبیرستان با استفاده از نظریه ون هیلی و با شرکت ۱۲ نفر از معلمان شاغل به تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و ۳۸ نفر از دانشجویان سال آخرکارشناسی دبیری ریاضی انجام گرفت. روش تحقیقی پژوهش، علّی- مقایسه‌ای می‌باشد. محققین جهت ارزیابی دانش شرکت کنندگان در درس هندسه، آزمون هندسی ون‌هیلی را به‌کار گرفتند و به منظور تجزیه و تحلیل اطلاعات، از آزمون t استیودنت تک نمونه ای با ۰/۰۱ = α استفاده کردند. نتایج تحقیق نشان داد که شرکت کنندگان پژوهش از سطح سوم ون هیلی (استنتاج غیر رسمی) عبور کرده‌اند، ولی به سطح چهارم (استنتاج رسمی) نرسیده‌اند. به روشنی واضح است که این نتایج، سطح چهارم ون هیلی، یعنی سطح مورد انتظار معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی را نشان نمی‌دهد. بنابراین درس‌های جاری هندسه در برنامه دوره کارشناسی دبیری ریاضی، صلاحیت دانشی کافی را برای تدریس هندسه دبیرستان به دانشجویان دبیری ریاضی ارائه نمی‌دهند.

کلمات کلیدی: دانش معلم ریاضی، دانش هندسی، ون هیلی، دانشجویان دبیری ریاضی

۱- مقدمه

امروزه تدریس هندسه از اهمیت بسیاری برخوردار است؛ زیرا به عنوان ابزاری برای درک، توصیف و تعامل با فضایی که در آن زندگی می‌کنیم،مورد توجه قرار می‌گیرد و از شهودی‌ترین و ملموس‌ترین بخش‌های ریاضیات به شمار می‌رود. یوسسکین[1] در اهمیت تدریس هندسه دو دلیل بیان می‌کند:

۱- هندسه به صورت منحصر به فردی ارتباط ریاضی را با دنیای واقعی برقرار می‌سازد.

۲- هندسه به صورت منحصر به فردی در روشن ساختن ایده‌ها در دیگر عرصه‌های ریاضیات تواناست [۱].

اگر معلمین ریاضی به خوبی برای تدریس هندسه آماده نشوند، احتمالاً پایه دانشی و موقعیت‌های دنیای واقعی دانش‌آموزان تحت تأثیر واقع می‌شود. تدریس هندسه در مدارس اکثر کشورها به تشخیص، بررسی و تحقیق، نامگذاری، توصیف، دسته بندی، ترسیم، اندازه‌گیری، روابط میان شکل‌ها در فضای دو بعدی یا سه بعدی، استدلال کردن، به کارگیری هندسه مختصاتی و تبدیل‌های هندسی و به کارگیری ایده‌ها و روابط هندسی در ریاضیات و نیز حوزه‌های خارج از ریاضیات تأکید می‌کند؛ بنابراین شکل‌های طبیعی و ترسیمی در مرکز توجه معلمان و دانش‌آموزان قرار دارند. از این رو معلمان نیازمند به آگاهی در بخش‌های مختلف و اصلی هندسه، شکل های هندسی و تشخیص روابط و خصوصیات آن‌ها، استدلال استقرایی و استنتاجی و درک فرآیندهای حدس زدن، توجیه کردن، مدل‌سازی ریاضی و حل مسأله، به کارگیری مناسب انواع مختلف اثبات، به کارگیری هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، هندسه مختصاتی و تبدیلات هندسی هستند. به طور طبیعی هر چقدر سطح تدریس بالاتر باشد درک هندسه و تصویری از آن که در دستور کار تدریس و یادگیری است، جامع‌تر، چند وجهی‌تر و پیچیده‌تر است؛ بنابراین آگاهی و دیدگاه‌های هندسی معلمین، به لحاظ وسعت و عمق، با سطوحی که آنها تدریس می‌کنند، افزایش می‌یابد. از این رو معلمین هندسه دبیرستان باید بدانند که هندسه دارای یک تاریخ طولانی و پیچیده است، موضوعی

تاریخ دریافت مقاله ۸۸/۱۲/۲۶ ، تاریخ تصویب نهایی ۸۹/۰۴/۱۴

[1] **استادیار**، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی:
e_reyhani@yahoo.com
[2] **استادیار**، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
[3] **استادیار**، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
[4] **کارشناس ارشد**، دبیر ریاضی، شهرستان سنقر

است که ریشه در جوامع و تمدن‌های نخستین انسانی دارد و به صورتی عمیق در فرهنگ انسانی، جامعه، علم و فن آوری جای گرفته است.

تحقیقات نشان می‌دهد هر چقدر تدریس بر مبنای درک مفهومی باشد، مؤثرتر است و این حاصل نمی‌شود مگر این که معلمان درکِ عمیقی از محتوا داشته باشند. بِرون و بِیرد[۲] بیان کردند که معلمین با دانش ریاضی بیشتر، تدریسشان مفهومی‌تر است، در حالی که معلمینی با سطح پایین‌تری از دانش، تدریسشان بیشتر بر مبنای قاعده و دستور است [۲]. امروزه درباره رشدِ صلاحیت‌های معلمی در ریاضیات، پنج مؤلفه اصلی و اساسی راجع به دانشِ معلمان وجود دارد تا آنها نقش خود را به عنوان آموزش دهنده بهتر ایفا کنند:

- دانشِ محتوایی ریاضیات[۳] (MCK): دانشِ محتوایی ریاضیات اشاره به دانش موضوع درسی دارد. این دانش شامل اطلاعاتی از قبیلِ مفاهیم ریاضی، اصل‌ها و چارچوب‌های تبیینی یک رشته و قاعده‌ها و رویه‌های مربوط به حل مسأله است [۳]. بررسی کردن دانش محتوایی ریاضی مهم است زیرا دستور کار جلسات سیاست‌گذاری زیادی در آموزش ریاضی است. هنگامی که سیاست‌گذاران و ریاضی‌دانان حرفه‌ای مسائل و مشکلات یاددهی و یادگیری ریاضیات مدرسه را ملاحظه می‌کنند، مکرراً به این نتیجه می‌رسند که زمانی دانش‌آموزان ریاضیات را بیشتر یاد می‌گیرند که معلمانشان بیشتر ریاضیات بدانند [۴]. واضح است که دانش موضوعی به تنهایی برای تدریس مؤثر کافی نیست.
- دانشِ پداگوژی[۴] (PK): دانشِ پداگوژی اشاره به درک معلمان از دانش‌آموزان و فرآیندهای مشمول در تدریس دارد و شامل کلیاتی در مورد آموزش و پرورش، تعلیم و تربیت، روش ها و فنون تدریس است [۳].
- دانش پداگوژیِ محتوا[۵] (PCK): این دانش اولین بار توسط شلمن[۶] مطرح شد که ترکیبی از دانشِ محتوایی و دانش پداگوژی است. دانش پداگوژیِ محتوا شاملِ درک مواردی است مانند این که چرا بعضی از دانش‌آموزان در یادگیری یک مفهوم خاص مشکلاتی دارند، در حالی که بعضی دیگر از دانش‌آموزان آن را به آسانی در می‌یابند و جذب می‌کنند [۳]. دانش پداگوژیکی محتوا از دانش محتوایی فراتر می‌رود و شامل ابعادی از محتوا، مرتبط با قابلیت تدریس آن است. شلمن دانش پداگوژی محتوا را دانش چگونگی ارائه و فرمول بندی موضوعات قابل تدریس می‌داند به طوری که آن موضوعات قابل درک برای یادگیرندگان شوند. او همچنین دانش پداگوژی محتوا را شامل دانش درباره یادگیرندگان و ویژگی‌هایشان، دانش زمینه‌های آموزشی، دانش اهداف آموزشی، مقاصد و ارزش‌ها تعریف می‌کرد [۵].
- دانش پداگوژی محتوایی فن‌آوری[۷] (TPCK): نیس[۸] این نوع دانش را برای آماده سازی معلمان ریاضی، درک عمیقی از دانشِ مواد موضوعی با توجه به فن‌آوری و آنچه تدریس با فن‌آوری معنی می دهد، عنوان کرد. او چهار مؤلفه زیر را به عنوان شیوه‌ای برای توضیح دادن دانش پداگوژی محتوایی فن‌آوری در جهت برنامه‌های آماده‌سازی معلمان ریاضی گسترش داد:

الف) مفهوم گسترده‌ای از آنچه که در تدریس موضوعی خاص مثل ریاضیات، تلفیق فن‌آوری در یادگیری را معنی می‌دهد.

ب) دانشِ استراتژی‌های آموزشی و نمایشی برای تدریس موضوعات ریاضی خاص با فن آوری.

پ) دانشِ درک، تفکر و یادگیری دانش آموزان با فن‌آوری در موضوعی مثل ریاضیات.

ت) دانش برنامه درسی و مواد برنامه درسی که فن‌آوری و یادگیری ریاضیات را ادغام می‌کند [۶].

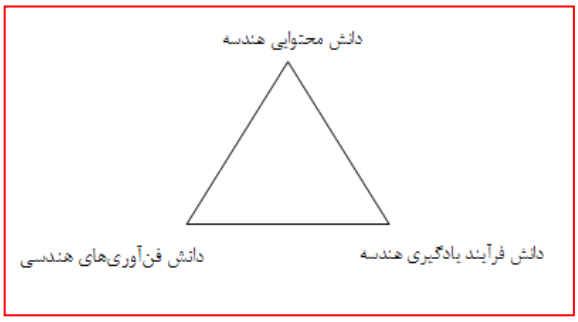
- دانش کسب شده از کارآموزی: دوره‌های کارآموزی در بسیاری از کشورها فرصتی برای تلفیق مسائل نظری و عملی است و در صورت اجرای مناسب، قابلیت‌های مناسبی را برای یک تدریس کارآمد ایجاد می‌کند.

تصمیم در مورد اینکه چه موضوعی در برنامه درسی دبیری ریاضی دارای اهمیت است و این که با چه عمقی و با چه روش هایی باید به دانشجویان آموزش داده شود چالشی اساسی برای ریاضیدان‌ها و برنامه ریزان نظام تربیت معلم به حساب می‌آید. مؤلفه‌های متعددی در آماده سازی دانشجویان دبیری ریاضی برای تدریس هندسه دبیرستان نقش مؤثر دارند. مهم‌ترین این مؤلفه‌ها در سه حوزه زیر قابل تفکیک است:

- دانش محتوایی هندسه

- دانش فرآیند یادگیری هندسه
- دانش فن‌آوری های هندسی (نرم افزارهای هندسی پویا)

این مؤلفه‌ها مثلثی را ایجاد می‌کنند که پایه‌ای برای آموزش هندسه در دوره کارشناسی دبیری ریاضی است.



شکل ۱ مؤلفه‌های آماده سازی دانشجویان دبیری ریاضی برای تدریس هندسه دبیرستان

دانش محتوایی هندسه: تدریس موفق هندسه به دبیرانی بستگی دارد که دارای دانش مناسبی از هندسه بوده و از چگونگی تدریس مؤثر آن نیز آگاه باشند. در یک مطالعه تحقیقی مربوط به تدریس هندسه معلمین پایه‌های میانی (پایه‌های ۸-۴) سوافورد، جونز و تورنتون[۹] دریافتند که دانش زیاد از هندسه و شناخت دانش آموزان، بر آنچه که معلمان تدریس می‌کنند و بر چگونگی تدریس آن، مؤثر است و موجب می‌شود هنگام تدریس هندسه، ویژگی‌های حرفه‌ای خاصی از خود نشان دهند [۷]. امروزه هندسه دبیرستان بیشتر شامل هندسه مسطح اقلیدسی است که بر منطق و اثبات تأکید می‌کند و ترکیبی از رویکردهای رسمی و غیر رسمی در محتوای هندسی و تکیه بر اصل موضوع و توجه زیاد به تجسم و حل مسأله است؛ از این رو آمادگی معلمان ریاضی برای تدریس این درس الزامی است. هیئت کنفرانس ایالات متحده امریکا برای علوم ریاضی[۱۰] (CBMS) پژوهشی درباره این که چه دانشی برای معلمان ریاضی لازم است تا جهت تدریس هندسه دبیرستان آماده شوند، انجام داد. نتایج تحقیق نشان داد که دانش مورد نیاز عبارت است از:

۱- تسلط بر مفاهیم اصلی و اصل‌های هندسه اقلیدسی در صفحه و فضا.

۲- درکِ ماهیت استدلال اصل موضوعی و نقشی که در توسعه ریاضیات و سهولتِ اثبات ایفا کرده است.

۳- درک و توانایی سر و کار داشتن با انواعی از روش‌ها، مفاهیم وابسته و نمایش‌های مختصاتی، برداری، تبدیلاتی.

۴- درکِ مثلثات از دیدگاه هندسی و مهارت داشتن در به کارگیری از آن در حل کردن مسأله.

۵- آگاهی داشتن از بعضی از موضوعات هندسی مهم و کاربردهایشان، از قبیلِ مفروش سازی، فراکتال‌ها، ترسیم‌های کامپیوتری، رباتیک‌ها و تجسم.

۶- توانایی در به کارگیری ابزارهای ترسیم هندسی پویا در انجام تحقیقات هندسی با تأکید بر تجسم، الگوشناسی، حدس زدن و اثبات [۸].

این هیئت همچنین خاطر نشان می‌سازد که نداشتن درک عمیقی از همه آن موضوعات مناسب در هندسه دانشگاهی، که با هندسه اقلیدسی و اصول موضوع به طور گسترده سروکار دارد، خطری آشکار است.گروور و کانر[۱۱] ویژگی‌های مطلوب و مناسبِ دوره‌های آماده سازی معلمان هندسه را به صورت زیر فهرست کرده‌اند:

- ایجاد دانشِ گسترده و عمیقی از هندسه؛
- ارائه گستره‌ای از تکنیک‌های آموزشی تأمل برانگیز با نظریات استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی[۱۲]؛
- ارائه تنوعی از شیوه‌های ارزشیابی که درکِ مفهومی و سطوح بالاتر استدلال را می‌سنجند [۹].

دانش فرآیند یادگیری هندسه: تحقیقات در آموزش ریاضیات در عرصه دانش معلمان ریاضی در حوزه هندسه و روش‌های متنوعی که به‌وسیله آن تجارب هندسی، درک و توانایی به دست می‌آید در خلال دو دهه اخیر بیشتر شده است و همچنان نیز ادامه دارد. وقتی دانش‌آموز یا یادگیرنده‌ای به یادگیری هندسه می‌پردازد، از قبل مالک سرمایه‌ای غنی از دانش و تجربه هندسی است که در زندگی جهان مادی به دست آورده است. به طور طبیعی این مسأله فرصت‌های فراوانی را ایجاد می‌کند و موانع مهمی را نیز به وجود می‌آورد. مهم این است که دبیران از هر دو (فرصت‌ها و موانع) تا حدی که به آنها اجازه بهره‌وری از فرصت‌ها و در مقابل اجتناب کردن از موانع را بدهد، آگاه باشند. نِس[۱۳] فرصت‌ها را برای معلم، تجربه روزانه هندسی یادگیرنده، روش‌ها و تکنیک‌های هندسی، که اغلب در یک فعل و انفعال گویشی مانند ترسیم کردن، بسته‌بندی کردن، بریدن، چسباندن، ساختن، اندازه‌گیری

کردن، تغییر مکان و غیره همراه با اشیای فیزیکی، روزانه ایجاد می‌شود، می‌داند و موانع را در دو زمینه عمده توضیح می‌دهد:

۱- در حوزه نظری اثبات بر پایه استدلال است که بر اساس آن به طبیعت تئوری هندسی موجود وابسته است. مثلاً در هندسه اصل موضوعی اقلیدس، استدلال بر پایه استنتاج از حقایق و داده‌ها استوار است و در هندسه تحلیلی استدلال به سیستم عددی حقیقی و ویژگی‌هایش بستگی دارد. در مقابل، اثبات در حوزه تجربی در درجه نخست برمبنای بازدید تجربی به دنبال استقرا می‌باشد. کاملاً معلوم است که بسیاری از یادگیرنده‌های هندسه در فهم و درک از این تفاوت و در پذیرفتن اسلوب اثبات اقتباس شده در تئوری هندسی، مشکلات شدیدی دارند؛ بنابراین مهم است که دبیران ریاضی نسبت به منشأ و طبیعت این مانع یادگیری، به روش‌هایی، که بدان وسیله بتوانند بر آن فائق آیند، بصیرت و بینش داشته باشند.

۲- مانع دوم این است که اگر اشیای هندسه اقلیدسی حالت مستقیمی را دارند در واقعیت فیزیکی تعیین می‌کنند، به دست آوردن انواع دیگر هندسه که در آنها اشیا، نقاط و خطوط از نوع متفاوتی هستند، خیلی مشکل است. در جایی که مفاهیمی مثل «موازی» و «عمود بر هم» معنی و درک دیگری را مثلاً در هندسه کروی می‌طلبد، آشکارا این مشکل تقویت می‌شود. پس برای دبیر ریاضیات لازم است جهت توانایی تدریس هندسه به دانش آموزان، به اندازه کافی دارای دانش چگونگی یادگیری هندسه باشد [۱۰].

دانش فن‌آوری‌های هندسی (نرم افزارهای هندسی پویا): در استاندارد هندسه شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا آمده است: فن‌آوری دارای نقش مهمی در تدریس و یادگیری هندسه است. ابزارهایی مثل نرم‌افزارهای هندسی پویا، دانش آموزان را قادر می‌سازد تا مدل‌سازی کنند و تجربه‌ای فعال با تنوع گسترده‌ای از شکل‌های دو بعدی داشته باشند. نرم‌افزارهای هندسی پویا امکان تجربه و آزمایش با دسته‌ای از اشیای ریاضی و تمرکز بر تبدیلات هندسی را فراهم می‌آورند [۱۱]. بنابر اظهار دواتپ و ایرسوی[14] در درس هندسه، دانش‌آموزان فعالیت‌هایی را برای ساختن و ترسیم کردن نمونه‌ها، شکل‌های هندسی و روابطشان انجام می‌دهند و زمان زیادی را بدون کمک فن‌آوری برای این گونه فعالیت‌ها تلف می‌کنند؛ زیرا رسم کردن و ساختن اشکال هندسی نیز بدون کمک فن‌آوری مشکل است [۱۲].

در تحقیقی که جونز[15] انجام داد، نشان داد که فعالیت دانش آموزان با نرم افزارهای هندسی پویا می‌تواند در بررسی کردن، ساختن، حدس زدن و شرح دادن روابط هندسی به آنها کمک کند [۱۳]. از این رو معلم نقش مهمی را در هدایت دانش آموزان در دست‌یابی به درک عمیقی از هندسه با استفاده از نرم‌افزارهای هندسی پویا ایفا می‌کند و لازم است با این نرم‌افزارها و انواع مختلفی از آن‌ها آشنا باشد. جاسو[16] نیز در پژوهش خود به لزوم آشنایی معلمان برای استفاده از ابزارهای هندسی پویا تأکید می‌کند؛ زیرا معلمان با این نرم‌افزارها می‌توانند بین آموزش سنتی و آموزش مدرن ارتباطی ایجاد نمایند و همچنین فاصله خود را با نسل جدید و نیازهای متفاوت آنها کاهش دهند [۱۴].

هنوز شکافی عمیق بین دانش هندسی ارائه شده در دوره تربیت معلم و هندسه‌ای که در دبیرستان‌ها تدریس می‌شود وجود دارد. دانشجویان دبیری ریاضی در زمان تحصیل در دانشگاه آمادگی لازم را برای تدریس هندسه مدرسه‌ای کسب نمی‌کنند. مشکلات تربیت معلمان ریاضی تنها به کشور ما محدود نمی‌شود. به عنوان نمونه وو[17] می‌گوید: «دانشگاه‌های ما به طور مناسب معلمان ریاضی را برای نیازهای ریاضیشان در کلاس درس مدرسه آماده نمی‌کنند. بیشتر معلمان نمی‌توانند شکاف بین آنچه که ما در برنامه دوره کارشناسی به آنها می‌آموزیم و آنچه که آنها در مدارس به دانش‌آموزان یاد می‌دهند، پر کنند» [۱۵]. پژوهشگران با توجه به منابع و شواهد موجود، قصد دارند تحقیق کنند، که آیا دانش هندسی معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی برای تدریس هندسه دبیرستان (با استفاده از نظریه ون هیلی[18]) مناسب است؟ و راهکارهای لازم برای بهینه‌سازی برنامه درسی هندسه کارشناسی پیوسته دبیری ریاضی چیست؟

۲- اهداف و روش شناسی پژوهش

۲-۱ اهداف و سؤال تحقیق

الف) ارزیابی دانش هندسی معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی برای تدریس هندسه دبیرستان با استفاده از نظریه ون‌هیلی.

ب) ارائه پیشنهادی برای اصلاح برنامه درسی هندسه در دوره کارشناسی دبیری ریاضی به منظور بهینه‌سازی آموزش معلمان ریاضی.

برای رسیدن به اهداف فوق در این تحقیق در پی آن هستیم تا به سؤال زیر پاسخ دهیم:

- معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی در چه سطحی از تفکر هندسی نظریه ون هیلی قرار دارند؟

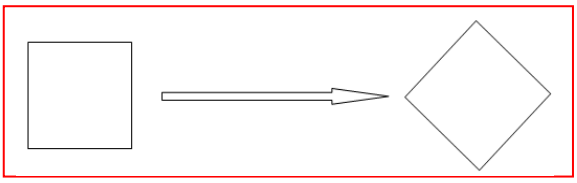
۲-۲ مبانی نظری تحقیق

نظریه تفکر هندسی ون هیلی- ون هیلی و مراحل آموزشی آن: دو آموزشگر هلندی به نام‌های دینا ون هیلی گلداف[۱۹] و همسرش پی یر ون هیلی[۲۰] در سال ۱۹۵۹، نظریه‌ای را ابداع کردند که شامل سطوح تفکر هندسی است. در این نظریه دانش آموزان، طی حرکت خود، از تشخیص صرف تا نوشتن یک اثبات رسمی دقیق هندسی، طی می کنند. این مدل نظری توضیح می‌دهد که چرا دانش آموزان در یادگیری هندسی به طور عام، و در نوشتن اثبات به طور خاص، با مشکل مواجه می شوند. این مدل شامل دو قسمت سطوح تفکر و مراحل آموزشی است [۱۶].

سطوح تفکر: توصیفی از روش‌های تفکر است که در یادگیری هندسه دانش آموزان یافت می‌شود. این سطوح، به ما نمی‌گوید که یک شخص چه مقدار دانش دارد، بلکه توصیف می‌کند که یک شخص چگونه و در مورد چه نوع از ایده‌های هندسی فکر می‌کند. این مدل بیان می‌کند که یک دانش آموز طی فرآیند یادگیری خود با عبور از چندین سطح تفکر، می‌تواند پیشرفت کند [۱۶].

این سطوح عبارتند از:

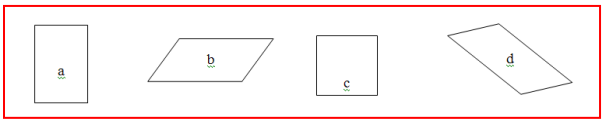
- سطح یک (تشخیص یا دیداری[۲۱]): این مرحله با شناسایی شکل‌ها شروع می‌شود که به طور طبیعی، به عنوان یک کل بدون مؤلفه‌های آن دیده می‌شوند. تشخیص دادن شکل‌های هندسی، تنها با نمود ظاهری است و اغلب با مقایسه آن‌ها با نمونه‌ای در دنیای واقعی شناخته می‌شوند [۱۷]. مثلاً فراگیران بگویند این شکل مستطیل است، به خاطر آن که شبیه یک در است. یا این که این شکل مربع است؛ زیرا شبیه پنجره یا قاب است. دانش آموزی که در این سطح فکر می‌کند، ممکن است تصور کند که اگر مربع را در امتداد ضلعش به اندازه ۴۵ درجه (شکل۲) دوران دهیم، خاصیت مربع بودنش را از دست می‌دهد؛ زیرا در این سطح، به ظاهر فیزیکی شکل توجه می‌شود و دانش‌آموزان، شکل‌ها را بر اساس ظاهر فیزیکی، دسته‌بندی و مرتب می‌کنند [۱۶].



شکل ۲ دوران مربع به اندازه ۴۵ درجه

- سطح دو (تجزیه و تحلیل[۲۲]): در این سطح دانش‌آموزان شکل‌ها را بر حسب مؤلفه‌ها و رابطه‌های میان این مؤلفه‌ها، تجزیه و تحلیل می‌کنند؛ برای مثال، دانش‌آموز تشخیص می‌دهد که ضلع‌های مقابل یک مستطیل هم‌نهشت هستند و یا همه زاویه‌های یک مستطیل قائمه‌اند و یا مثلث متساوی الاضلاع، می‌تواند به وسیله سه ضلع مساوی، سه زاویه مساوی و تقارن‌ها، از دیگر مثلث‌ها متمایز شود [۱۸].

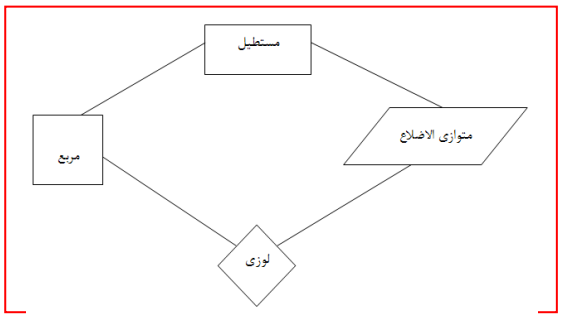
در این سطح دانش‌آموزان قادرند تمام خواص شکل‌های مختلف را فهرست کنند، ولی نمی‌توانند درک کنند که یک شکل ممکن است درون دسته دیگری نیز قرار گیرد؛ به عنوان مثال، آنها نمی‌توانند درک کنند که مربع‌ها و مستطیل‌ها، متوازی الاضلاع نیز هستند [۱۸]. در شکل۳ دانش‌آموزان فقط شکل های b و d را به عنوان متوازی الاضلاع تشخیص می‌دهند.



شکل ۳ مثال‌هایی از متوازی الاضلاع (هالت، ۲۰۰۸)

در این سطح، به جای شکل‌های تنها، موضوع تفکر، دسته‌هایی هستند که شکل‌ها در آن، قرار می‌گیرند و محصول و نتیجه تفکر در این سطح، خواص شکل‌ها هستند [۱۶].

• سطح سه (استنتاج غیر رسمی[۲۳] یا مرتب سازی[۲۴]): در این سطح دانش‌آموزان قادرند خواصِ مفاهیم، شکل‌ها و انواع تعریفات مجرد را به صورت منطقی مرتب کنند. همچنین قادر به تشخیص شرط لازم و کافی مجموعه‌ای از خواص در مفاهیم و شکل‌ها هستند [۱۹]. در این سطح، دانش آموزان قادرند روابط میان متوازی الاضلاع‌ها را در شکل ۴ ببینند.



شکل ۴ مثالی از مرتب سازی متوازی الاضلاع‌ها (هالت، ۲۰۰۸)

آن‌ها به آسانی می‌توانند درک کنند که یک مربع، مستطیل است و همچنین یک مستطیل، متوازی الاضلاع می‌باشد. در این سطح، دانش‌آموزان از روابط میان شکل‌های مختلف آگاه هستند. این روابط ممکن است برای دانش‌آموزان سطح دوم، مبهم و گنگ باشند. در سطح سوم، فهمی از استنتاج رسمی، نقش اصول، تعاریف رسمی، قضیه‌ها و عکس آنها وجود ندارد.

• سطح چهار (استنتاج رسمی[۲۵]): در این سطح، قضایای هندسی در درون یک دستگاه اصل موضوعی بنا نهاده می‌شود و دانش‌آموزان قادر به درک اصطلاحات تعریف نشده، اصول موضوع، تعریف‌ها، قضایا و همچنین روابط میان آن‌ها می‌شوند. یادگیرنده‌ای که در این سطح قرار دارد، به جای حفظ کردن اثبات‌ها قادر به ساختن آن‌ها است [۲۰]. دانش‌آموزان در این سطح اهمیت استنتاج را درک می‌کنند. آن‌ها همچنین، در این مرحله، نیاز به یک نظام دقیق‌تر استدلال و منطق را درک می‌کنند و می‌توانند ضمن گذر از مرحله شهود صرف و درک مستقیم، با عبارات مجرد نیز کار کنند و بر اساس استدلال و منطق، نتیجه‌گیری نمایند [۱۶].

• سطح پنج (دقت[۲۶]): در این سطح، فراگیران در یک گستره‌ای از سیستم‌های اصل موضوعی مختلف می‌توانند کار کنند. هندسه‌های غیر اقلیدسی مثل هندسه‌های بیضوی و هذلولوی[۲۷]، علاوه بر هندسه اقلیدسی نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرند و با هم مقایسه می‌شوند [۲۰]. این سطح، سطحی فراتر از برنامه ریاضی مدرسه‌ای است.

ویژگی‌های مدل ون‌هیلی: در ادامه به ویژگی‌های مختلف مدل ون هیلی اشاره می شود،

• ماهیت دنباله‌ای بودن[۲۸] سطوح: مطابق دیدگاه ون هیلی‌ها مدل، دنباله‌ای است. به این معنی که یادگیرنده‌ای نمی‌تواند در یکی از سطوح تفکر باشد بدون این که تمام سطوح قبل از آن را طی کرده باشد. این ادعا توسط محققینی چون بورگر و شانِسی[۲۹]، فوییس و همکارانش[۳۰] تأیید شده است [۱۹و۲۱].

• زبان شناختی[۳۱] بودن: هر سطح دارای یادگیرنده و نمادهای زبانی خاصی است و افرادی که در سطوح مختلف هستند نمی‌توانند همدیگر را درک کنند [۱۷]. برای مثال یک مستطیل در سطوح مختلف ون‌هیلی ممکن است معانی متفاوتی داشته باشد. یادگیرنده در سطح سوم مستطیل را به عنوان نوع خاصی از متوازی‌الاضلاع می‌گیرد، در حالی‌که این درک برای یادگیرنده‌ای در سطح پائین‌تر ون‌هیلی نیست و مشکل زمانی حادتر می‌شود که معلم از زبانی بالاتر از سطح یادگیرندگان استفاده کند.

• عدم وابستگی به سن: سطوح تفکر هندسی ون‌هیلی، وابسته به سن نیستند و در عوض، بستگی به تجربیاتی دارند که دانش‌آموزان در کلاس کسب کرده‌اند [۱۶].

• ماهیت درونی ذاتی و بیرونی تغییر[۳۲]: ون‌هیلی‌ها تأکید می‌کنند که این سطوح، به وسیله تفاوت در موضوع تفکر، از یکدیگر تمیز داده می‌شوند. برای مثال، در سطح ۱، فقط شکل ظاهری درک می‌شود. در حالی که یک شکل، به وسیله خواص خود تعیین می‌گردد که این مطلب، تا سطح ۲ که یک شکل به وسیله اجزا و مؤلفه‌هایش تجزیه و تحلیل می‌شود و خواص آن کشف می‌گردد، به دست نمی‌آید [۱۶].

• عدم مطابقت[۳۳] : اگر دانش‌آموز در یک سطح و آموزش در سطح دیگری باشد، احتمال دارد که یادگیری و پیشرفت مورد نظر حاصل نشود. به ویژه، اگر مطالب آموزش شامل

محتوا، واژگان و نظایر آن، در سطح بالاتری از سطح یادگیرنده باشند، آن گاه ممکن است دانش‌آموزان قادر نباشند که فرآیند تفکر به کار برده شده را، پیگیری کنند [۱۶].

• نقش معلم: ون‌هیلی‌ها، تأکید زیادی بر نقش آموزش و اهمیت کسب تجربه توسط یادگیرنده، برای سهولت عبور از یک سطح به سطح دیگر دارند. این امر، با نقش آفرینی معلم و از طریق طراحی فعالیت‌های مناسب برای یادگیرنده‌های سطوح مختلف، امکان پذیر است [۱۶]. تعدادی از محققین یک سری فعالیت‌های مناسب را برای عبور از یک سطح به سطح بعدی طراحی کرده‌اند. برای مثال هولمس[۳۴] پیشنهاد کرد، فعالیت‌های مورد نیاز یادگیرندگان برای عبور از سطح اول عبارتند از:

۱. دست‌ورزی با شکل‌های هندسی و شناسایی کردن آن‌ها.
۲. دسته بندی و مرتب کردن شکل‌ها.
۳. طراحی و ساختن شکل‌ها.
۴. توصیف شکل‌های هندسی با زبان خودشان.
۵. حل مسأله‌هایی که شامل شکل هستند [۲۲].

مراحل آموزشی[۳۵]: مراحل آموزشی، مراحل پیشنهادی برای معلمان هستند که چگونگی تدریس هندسه را به منظور تسهیل و کمک به رشد دانش‌آموزان، برای عبور از سطح تفکری که در آن هستند به سطح تفکر بعدی، سازمان دهی می‌کنند. این مراحل بنا بر اظهار ریحانی عبارتند از:

• مرحله کسب اطلاعات[۳۶]: در این مرحله، معلم و دانش‌آموزان، مشغول گفتگو و فعالیت در مورد موضوعات مورد مطالعه می‌شوند و دانش آموزان، با زمینه کار آشنا می‌گردند.

• مرحله جهت دهی[۳۷]: دانش‌آموزان هر مبحث مورد مطالعه را از طریق فعالیت‌هایی که توسط معلم طراحی شده‌اند، توسعه می‌دهند و یاد می‌گیرند. این فعالیت‌ها شامل تا کردن، اندازه‌گیری، جست‌وجو برای تقارن و مانند آن‌ها می‌باشند.

• مرحله شفاف سازی[۳۸]: در این مرحله دانش‌آموزان از شبکه‌هایی از روابط، آگاه می‌شوند و سعی می‌کنند که آن را به زبان خود بیان کنند.

• مرحله جهت گیری آزاد[۳۹] (غیر مقید): در این مرحله دانش‌آموزان به فعالیت‌ها و تکالیف حل مسأله‌ای گماشته می‌شوند که می‌توانند آن‌ها را با روش‌های مختلف و با استفاده از دانش، مهارت‌ها و رابطه‌هایی که قبلاً آموخته‌اند، انجام دهند.

• مرحله تلفیق (یکپارچگی)[۴۰]: دانش‌آموزان قادرند که دانش و اطلاعات و روابط جدید را در قالب یک کل جدید و یکپارچه ببینند [۱۶].

۲-۳ روش شناسی

جامعه تحقیق: این پژوهش دارای دو جامعه می‌باشد:

۱- جامعه دبیران ریاضی، شامل کلیه دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی شاغل به تدریس در دبیرستان و همچنین شاغل به تحصیل در رشته‌های ریاضی محض، آموزش ریاضی و ریاضی کاربردی در دانشگاه شهید رجائی.

۲- جامعه دانشجویان کارشناسی دبیری ریاضی، شاغل به تحصیل در دانشگاه شهید رجائی که بیش از ۱۰۰ واحد گذرانده باشند.

حجم نمونه: حجم نمونه برای جامعه‌های اول و دوم، خود جوامع، مورد نظر گرفته شد. حجم نمونه برای جامعه اول ۱۲ نفر و جامعه دوم ۳۸ نفر می‌باشد؛ بنابراین از روش نمونه‌گیری خاصی استفاده نگردید.

ابزار پژوهش: سؤالات آزمون ون‌هیلی در ابتدا از پژوهشی که در سال ۲۰۰۵ با عنوان تأثیر کنجکاوی و توانایی فضایی بر درکِ هندسه معلمان ریاضی راهنمایی و دبیرستان پیش از خدمت[۴۱] با توجه به دیدگاه ون هیلی توسط یونال[۴۲] برای أخذ مدرک دکتری انجام شده بود، أخذ شد.

یونال در این پژوهش از ابزاری که می‌بری[۴۳] در بررسی سطوح تفکر هندسی ون‌هیلی با شرکت معلمان پیش از خدمت انجام داده بود، استفاده کرد. در یک بررسی مقدماتی محققین پی بردند آزمون هندسه ون‌هیلی، که توسط یونال استفاده شده است، نسبت به ابزار اصلی آن در پژوهش می‌بری دارای اشتباهاتی است. بنابراین محققین در استفاده از این ابزار به مرجع اصلی آن یعنی پژوهش می‌بری مراجعه کردند و در نهایت با تأیید پایایی و روایی این ابزار از آن به عنوان وسیله گردآوری داده‌ها استفاده کردند.

روایی ابزار: سؤالات کار گرفته شده برای آزمون ون‌هیلی از پژوهشی که می‌بری انجام داده بود، استخراج شد. او برای تعیین روایی ابزار خود، ابتدا سؤالاتی را در هر سطح ون‌هیلی و از مفاهیم هندسی شامل مربع، مثلث متساوی الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، دایره، خطوط موازی، هم‌نهشتی و تشابه طرح کرد. به طوری‌که سؤالات در فرم و شکل‌های همسو و موازی بودند. می‌بری برای این کار از جدول ۱ استفاده کرد.

او برای هر درایه این جدول بیش از یک سؤال طراحی کرد. سؤالات مربوط به سطح پنجم در این جدول وجود نداشت زیرا آن‌ها از محتوای آزاد بودند. می‌بری سپس نامه‌ای حاوی توضیحی از پژوهش خود، شرحی از سطوح ون هیلی و لیستی از مجموعه سؤالات را برای ۱۰ نفر از ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی فرستاد که یکی از آن‌ها دکتر پی‌یر ون هیلی است که این نظریه را مطرح کرده و از آن‌ها خواست تا به سؤالات زیر پاسخ دهند:

۱- آیا این سؤالات مناسب هستند؟ (بله یا خیر)

۲- آیا به نظر می‌رسد که این سؤالات، آزمونی از سطوح ون‌هیلی باشند؟

۳- چه نظر یا پیشنهادی درباره اصلاح، ارزیابی و وضوح این سؤالات دارید؟ [۲۳].

ابزار تحقیق نهایی فقط شامل آن پرسش‌هایی است که عقیده همگان برآن بود که مناسبند.

با این که روایی سؤالات آزمون ون‌هیلی در آن مقطع زمانی تأیید شده بود با این حال محققین برای استفاده از آن، روایی و پایایی سؤالات را به شرح زیر مورد بررسی قرار دادند:

- مرحله اول: در این مرحله سؤالات آزمون طی جلساتی با اساتید ریاضی، اساتید هندسه دوره کارشناسی دبیری ریاضی و اساتید آموزش ریاضی کشور، که آشنا با نظریه ون‌هیلی بودند، مورد نقد و بررسی قرار گرفت.
- مرحله دوم: سؤالات استخراج شده از مرحله اول برای تعدادی از دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی و کارشناسی دبیری ریاضی مورد آزمون قرار داده شد تا اِشکالات موجود رفع گردد.
- مرحله سوم: سؤالات بازبینی شده از دو مرحله قبل را طی جلساتی با استادان متخصص دوباره مورد نقد و بررسی قرار گرفت تا سؤالاتِ آزمون، روایی کاملاً تأیید شده‌ای را به دست آورند.

پایایی ابزار: بعد از آزمون ون هیلی، برای به دست آوردن پایایی ابزار از ضریب آلفای کرونباخ استفاده شد.

نتایج حاصل از ضریب آلفای کرونباخ نشان داد که آزمون با آلفای ۰/۷۱۱ در سنجش متغیر مورد مطالعه موفق می‌باشد؛ اما با توجه به سؤالات نامناسبی که در مجموعه وجود داشت، محققین آن‌ها را از مجموعه حذف کردند و بدین ترتیب ضریب آلفای کرونباخ ۰/۸۰ به دست آمد.

روش‌های آماری: در تحلیل داده‌های آزمون ون‌هیلی، محققین امتیاز یک (۱) را برای پاسخ صحیح و امتیاز صفر (۰) را برای پاسخ غلط به سؤالات آزمون در نظر گرفتند. به منظور انجام تجزیه و تحلیل اطلاعات و در پاسخ به سؤال پژوهش محققین از آزمون t استیودنت تک نمونه‌ای استفاده کردند.

۳- نتایج و بحث

جهت بررسی سؤال پژوهش یعنی «معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی در چه سطحی از تفکر هندسی نظریه ون هیلی قرار دارند؟» ابتدا آن را به دو سؤال زیر تبدیل می‌کنیم:

۱- آیا دبیران و دانشجویان دبیری ریاضی بر اساس طبقه‌بندی ون هیلی در سطح سوم قرار دارند؟

۲- آیا دبیران و دانشجویان دبیری ریاضی بر اساس طبقه‌بندی ون هیلی در سطح چهارم قرار دارند؟

به منظور بررسی سؤال اول ابتدا آن را به صورت فرض آماری بیان می‌کنیم:

$$H_0 : \bar{x} - \mu = 0$$
$$H_1 : \bar{x} - \mu \neq 0$$

برای بررسی فرضیات آماری فوق از آزمون t استیودنت تک نمونه‌ای استفاده شد که نتایج آن در جدول۲ آمده است.

با توجه به اطلاعات جدول ۲ می‌توان نتیجه گرفت، مقدار t (t =۲/۹۴۲) به دست آمده با درجه آزادی ۴۹ در سطح ۹۹٪ اطمینان، معنی‌دار می‌باشد؛ در نتیجه فرض صفر رد و فرض مخالف تأیید می‌شود. این اطلاعات به این معنی است

که چون t به دست آمده با علامت مثبت است؛ لذا دانشجویان دبیری و دبیران ریاضی دبیرستان‌ها از سطح سوم ون‌هیلی عبور کرده‌اند.

به منظور بررسی سؤال دوم ابتدا آن را به صورت فرض آماری بیان می‌کنیم:

$$H_0 : \bar{x} - \mu = 0$$

$$H_1 : \bar{x} - \mu \neq 0$$

برای بررسی فرضیات آماری فوق از آزمون t استیودنت تک نمونه‌ای استفاده شد که نتایج آن در جدول ۳ آمده است. از جدول ۳ این‌نتیجه حاصل می‌شود، که مقدار t (۳/۱۸۸-=t) به‌دست آمده منفی است لذا شرکت کنندگان در آزمون، به سطح چهارم تفکر هندسی ون هیلی نرسیده‌اند و در هر دو فرض آماری، فرض مخالف تأیید می‌شود.

با اجرای آزمون t در سطح ۹۹٪ اطمینان، مشخص شد که معلمان ریاضی دبیرستان و دانشجویان دبیری ریاضی از سطح سوم ون هیلی (استنتاج غیر رسمی یا مرتب سازی) عبور کرده‌اند ولی به سطح چهارم (استنتاج رسمی) نرسیده‌اند. به روشنی واضح است که این نتایج، سطح ون هیلی مورد انتظار برای معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی را نشان نمی‌دهد (سطح چهارم). زیرا اصول و استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی برای ریاضیات مدرسه (۲۰۰۰) انتظاراتی برای دانش‌آموزان در رسیدن به سطوح تفکر هندسی ون‌هیلی برای هر یک از گروه- پایه‌های زیر فراهم می‌کند:

جدول۱ جدول ایجاد شده توسط می‌بری برای تهیه آزمون ون هیلی(می‌بری،۱۹۸۱)

مفاهیم / سطوح	مربع	مثلث متساوی الساقین	مثلث قائم الزاویه	دایره	خطوط موازی	همنهشتی	تشابه
۱							
۲							
۳							
۴							

جدول۲ نتایج آزمون t در سطح سوم ($\mu = ۲۸$) ون‌هیلی برای شرکت کنندگان در آزمون

شاخص ها	تعداد	میانگین	انحراف معیار	خطای استاندارد میانگین	درجه آزادی	t	سطح معنی داری
نمره کسب شده	۵۰	۳۰/۴	۵/۷۶۷	۰/۸۱۵۶۶	۴۹	۲/۹۴۲	$p<۰/۰۱$

جدول۳ نتایج آزمون t در سطح چهارم ون هیلی($\mu = ۳۳$) برای شرکت کنندگان در آزمون

شاخص ها	تعداد	میانگین	انحراف معیار	خطای استاندارد میانگین	درجه آزادی	t	سطح معنی داری
نمره کسب شده	۵۰	۳۰/۴	۵/۷۶۷	۰/۸۱۵۶۶	۴۹	-۳/۱۸۸	$p<۰/۰۱$

- انتظارات برای دانش‌آموزان پایه‌های پیش دبستانی تا دوم ابتدایی به طور گسترده‌ای از تشخیص و تجسم شکل‌های هندسی (سطح اول؛ تشخیص) شروع می‌شود و به آشنا کردن دانش آموزان به شناسایی بخش‌های مختلفی از شکل‌های دو بعدی و سه بعدی، خاتمه می‌یابد (سطح دوم؛ تجزیه و تحلیل).
- انتظارات برای دانش‌آموزان پایه‌های ۳ تا ۵ از تشخیص و توصیف ویژگی‌های شکل‌های هندسی دو بعدی و سه بعدی (سطح دوم؛ تجزیه و تحلیل) شروع می‌شود و به آشنا کردن دانش‌آموزان با پیش‌بینی کردن نتایجِ انتقال و چرخاندن شکل‌های هندسی دو بعدی و سه بعدی، خاتمه می‌یابد (سطح سوم؛ استنتاج غیر رسمی).
- انتظارات برای دانش‌آموزان پایه‌های ۶ تا ۸ از توصیف و دست‌ورزی با اشیای هندسی دو بعدی و سه بعدی برای ایجاد کردن استنتاج‌های غیر رسمی ایده‌های هندسی و روابط شان مانند تشابه، هم‌نهشتی و رابطه فیثاغورس (سطح سوم؛ استنتاج غیر رسمی) شروع می‌شود و به آشنا کردن دانش‌آموزان با رسم اشیای هندسی دو بعدی و سه بعدی با ابزارهای متنوع، خاتمه می‌یابد (سطح چهارم؛ استنتاج رسمی).
- انتظارات برای دانش‌آموزان پایه‌های ۹ تا ۱۲ شامل ساختن، آزمایش کردن و اثبات حدس‌ها و فراهم آوردن فرصتی جهت استفاده از مدل‌سازی و حل مسأله در دنیای فیزیکی و واقعی است (سطح چهارم؛ استنتاج رسمی) [۱۱].

نتایج بیانگر آن است که شرکت کنندگان پژوهش در دوران تحصیلات مقدماتی خود در دبیرستان به سطح چهارم تفکر هندسی ون‌هیلی نرسیده بودند و آموزش هندسه در دانشگاه و دوره کارشناسی دبیری ریاضی نیز نتوانسته است معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی شرکت کننده در پژوهش را به سطح چهارم تفکر هندسی ون‌هیلی برساند و آنان را نیز به سطح پنجم ارتقا دهد. بنابراین درس‌های جاری هندسه دانشگاهی، صلاحیت دانشی کافی را برای تدریس هندسه دبیرستان به دانشجویان دبیری ریاضی ارائه نمی‌دهد (شکل۶).

نتیجه تحقیق با یافته‌های نایت[۴۴] که ادعا کرد بیشتر معلمان پیش از خدمت دبیرستان پایین‌تر از سطح چهارم ون- هیلی قرار دارند، مطابقت دارد [۲۴]. همچنین با یافته‌های مطالعات گوتیرز، جایم، فورچونی[۴۵]، می‌بری، دواتپ[۴۶]، دارموس، تولاک و اُلکان[۴۷] که نشان دادند معلمان پیش از خدمت ابتدایی و دبیرستان به سطح پنجم ون‌هیلی (دقت) دست نمی‌یابند، هماهنگ است.

سه نمونه از سؤالات آزمون که از سطوح ۳و۴و۵ انتخاب شده‌اند در ادامه ارائه شده‌اند.

۱. چه ترکیبی از موارد زیر (حداقل موارد) می‌تواند تضمین کند که یک شکل، مثلث قائم الزاویه باشد؟ (سطح سوم؛ درک تعاریف)

الف) آن شکل یک مثلث است.

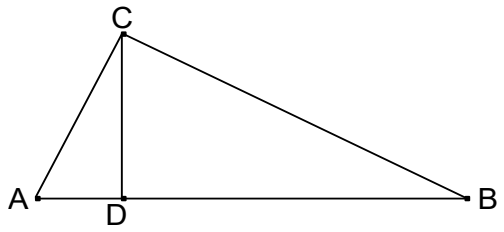
ب) دو زاویه حاده دارد.

پ) مجموع زاویه آن ۱۸۰ درجه است.

ت) یکی از ارتفاع‌ها، ضلع است.

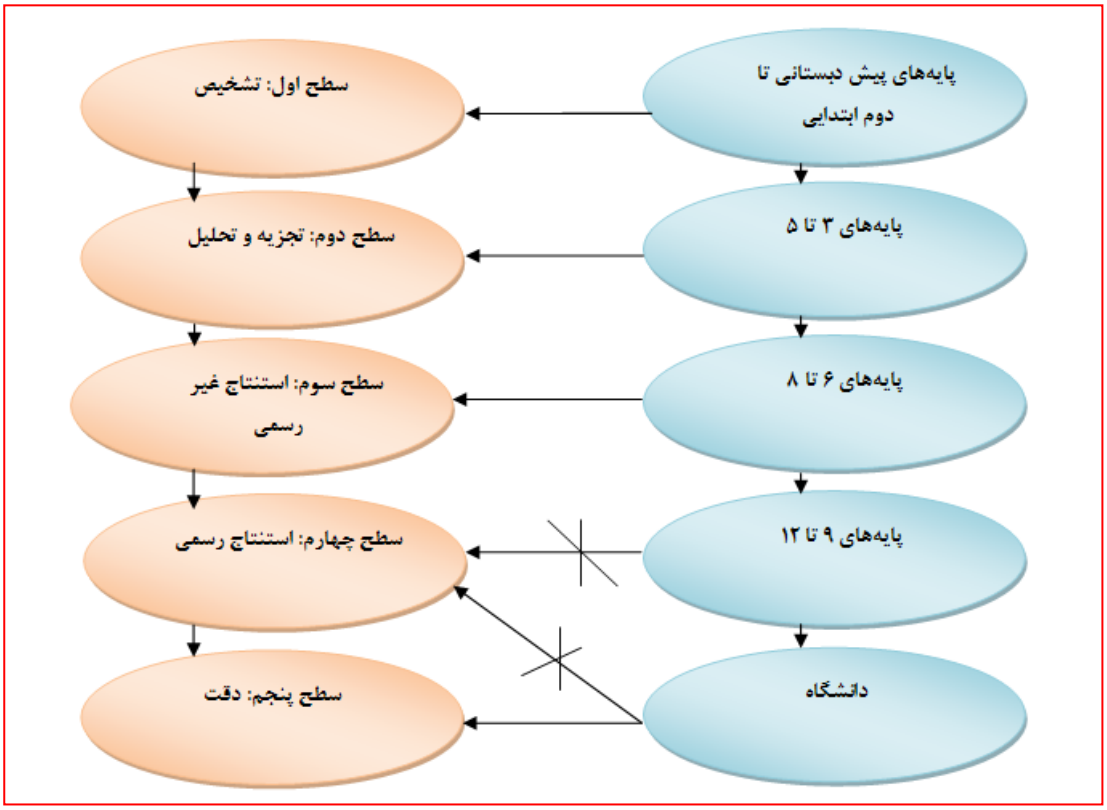
ث) مجموع اندازه دو زاویه ۹۰ درجه است.

۲. در شکل زیر CD بر AB عمود است و $A\hat{C}B = ۹۰^\circ$. اگر شما زاویه‌های $A\hat{C}D$ و $\hat{B}$ را اندازه بگیرید، در می‌یابید که آنها با هم مساوی هستند. آیا این تساوی برای همه مثلث‌های قائم الزاویه درست است؟



چرا؟ سطح چهارم؛ اثبات کردن)

۳. چه تفاوتی میان اصل موضوع و قضیه وجود دارد؟ توضیح دهید (سطح پنجم؛ دقت).



شکل۶ عدم دست‌یابی معلمان و دانشجویان دبیری ریاضی به سطح مورد انتظار در آزمون هندسی ون‌هیلی

۴– نتیجه گیری

هندسه یکی از موضوعات مهم در ریاضیات مدرسه‌ای است که با دارا بودن جایگاهی ثابت، حجم قابل ملاحظه‌ای از برنامه درسی ریاضیات مدرسه را به خود اختصاص داده است. همچنین با توجه به این که هندسه بخش با ارزشی از فرهنگ، تمدن و تاریخ بشری را تشکیل می‌دهد، می‌تواند به شکل درستی ارتباط بین ریاضیات و دنیای واقعی را برای دانش‌آموزان به تصویر کشد. از جنبه دیگر هندسه می‌تواند زمینه‌ای مناسب برای رشد خلاقیت و توانایی حل مسئله دانش‌آموزان فراهم کند. تحقیق حاضر نشان داد که دوره‌های دبیری دانش مورد نیاز را برای تدریس هندسه در اختیار دانشجو معلمان قرار نمی‌دهند. اگر چه درسی مناسب و ضروری مانند «مبانی هندسه» در برنامه درسی دبیری ریاضی حضور دارد، با این حال بسیاری از نیازهای دانشجو معلمان برای تدریس این درس در مدرسه بدون پاسخ باقی مانده است. به طور مثال دانشجویان باید دانش کافی در زمینه فن‌آوری‌های هندسی کسب کنند. با توجه به نقش فن‌آوری در تسهیل یاددهی و یادگیری، یک معلم ریاضی برای تدریس هندسه باید با نرم‌افزارهای هندسی پویا مانند کبری[۴۸] آشنایی کافی داشته باشد و به نحو مناسبی از آن در تدریس استفاده کند. همچنین دانشجویان باید درک عمیقی از دانش محتوایی هندسه دبیرستان و نیز روش‌های تدریس آن داشته باشند. دانشجویان باید دانش پداگوژیکی محتوایی لازم برای تدریس هندسه را کسب کنند. این دانش به معلم ریاضی کمک می‌کند تا هندسه را برای دانش‌آموزان قابل درک سازد و بفهمد چرا یک دانش‌آموز در حل مسائل هندسی و تجزیه و تحلیل شکل‌ها ناموفق است. درسی تحت عنوان «آشنایی با هندسه مدرسه‌ای و روش‌های آموزش آن» می‌تواند این مسئولیت را به انجام رساند. تدوین استانداردهایی برای دانش مورد نیاز معلمان در تدریس هندسه مدرسه‌ای آشکارا ضروری به نظر می‌رسد. در کنار این‌ها نقش گروه‌های ریاضی و اساتید ریاضی دانشگاه‌های تربیت دبیر نیز بسیار مهم است. آگاهی از محتوای هندسه مدرسه‌ای و اهداف آن و نیز روش تدریس آن و همچنین نظریه‌های تفکر هندسی مانند نظریه ون‌هیلی و

پژوهش‌های مرتبط با یاددهی و یادگیری هندسه برای اساتید و گروه‌های ریاضی یک امر لازم است. در یک کلام باید پذیرفت که برنامه کارشناسی دبیری ریاضی و اجرای آن نیازمند بازنگری و اصلاح اساسی است.

پی نوشت

[1] Usiskin
[2] Brown & Baird
[3] Mathematics content knowledge
[4] pedagogical knowledge
[5] pedagogical content knowledge
[6] Shulman
[7] Technology Pedagogical Content Knowledge
[8] Niess
[9] Swafford, Jones, and Thornton
[10] Conference Board for the Mathematical Sciences
[11] Grover and Connor
[12] National Council of Teachers of Mathematics
[13] Niss
[14] Duatepe and Ersoy
[15] Jones
[16] jasso
[17] WU
[18] Van hiele
[19] Dina Van Hiele-geld of
[20] Pierre Van Hiele
[21] Recognition/Visualization
[22] Analysis
[23] Informal Deduction
[24] Ordering
[25] Formal Deduction
[26] Rigor
[27] Elliptic and Hyperbolic
[28] Sequential
[29] Burger and Shaughnessy
[30] Fuys et al
[31] Linguistics
[32] Intrinsic and Extrinsic
[33] Mismatch
[34] Holmes
[35] Phases of Instruction
[36] Information
[37] Directed Orientation
[38] Explicitation
[39] Free Orientation
[40] Integration
[41] The Influnce of Curiosity and Spatial Ability on Preservice Middle and Secondary Mathematics Teacher's
[42] Understanding of Geometry
[43] Unal
[44] Mayberry
[45] Knight
[46] Gutierrez, Jaime, & Fortuny
[47] Duatepe
[48] Durmuş, Toluk, & Olkun

مراجع

[1] Usiskin Z., *What should not be in the algebra and geometry curricula of average college bound students?* The Mathematics Teacher, Vol.100, **1980**, pp.68-77.

[2] Brown C.A. and Baird J., *Inside the teacher: Knowledge, beliefs, and attitudes, In P.S. Wilson (Ed.)*, Research ideas for the classroom: *High school mathematics*, New York: Macmillan, **1993**, pp. 245–259.

[3] Chinnappan M. and Lawson M.J., *A Framework for analysis of teachers geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching*, Journal of Mathematics Teacher Education, DOI10.1007/s10857-005-0852-6,Vol.8, **2005**, pp.197–221.

[4] Kovarik K., *Mathematics educators' and teachers' perceptions of pedagogical content knowledge*, Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, **2008**.

[5] Turnuklu E. and Yesildere S., *the Pedagogical Content Knowledge in Mathematics: Preserves Primary Mathematics Teachers' Perspectives in Turkey*, IUMPST: The Journal, Vol.1 (Content Knowledge), **2007**.

[6] Niess M.L, Preparing *teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge*, Teaching and Teacher Education, Vol.21, **2005**, pp. 509-523.

[7] Swafford J.O., Jones G.A. and Thornton C.A., *Increased Knowledge in Geometry and Instructional Practice*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol.28, No.4, **1997**, pp. 467-483.

[8] Conference Board for the Mathematical Sciences, *Mathematical Education of Teachers Project*, Washington D.C., CBMS, **2000**.

[9] Grover B.W. and Connor J., *Characteristics of the College Geometry Course for Preserves Secondary Teachers*, Journal of Mathematics Teacher Education, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, Vol.3, **1999**, pp.47–67

[10] Niss M., Teacher Qualification and the Education of Teacher, In Mammana C. and Villani V. (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, and An ICMI study Dordrecht Kluwer Academic Publishers, **1998**.

[11] National Council of Teachers of Mathematics, Principles and standards for school mathematics, Reston, VA: NCTM, **2000**.

[12] Duatepe A. and Ersoy Y., *Effects of Using Calculators (TI-92) on Learning Transformational Geometry*, Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), **2002**.

[13] Jones K., *Research on the Use of Dynamic Software: Implications for the Classroom, Integrating ICT into the Mathematics Classroom*, Derby: Association of Teachers of Mathematics, **2005**, pp. 27-29.

[14] Jasso J., *Training with Cabri Geometre*, University of Perugia, Italy, **2003**.

[15] Wu H., *What Is So Difficult About the Preparation of Mathematics Teachers?* http://math.berkeley.edu/~wu/pspd3d.pdf, **2002**.

[۱۶] ریحانی ابراهیم، معرفی نظریه پیاژه و نظریه فن هیلی- فن‌هیلی در مورد یادگیری هندسه، رشد آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، شماره ۸۰، دوره ۲۲، **۱۳۸۴**، صفحه‌های ۱۲ الی ۲۲.

[17] Mason M., *The van Hiele Levels of Geometric Understanding*, Professional Handbook for Teachers, Geometry Explorations and Applications, **2002**, pp.4-8.

[18] Halat E., *In-Service Middle and High School Mathematics Teachers: Geometric Reasoning Stages and Gender*, The Mathematics Educator, Vol.18, No.1, **2008**, pp.8–14.

[19] Burger W. and Shaughnessy J.M., *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol.17, **1986**,pp.31-48.

[20] Cabral B., *The Van Hiele's Model and Cognitive Visualization in Learning Geometry at Secondary School*, Unpublished Masters of Arts in Teaching Thesis, The University of Texas at Elpasco, **2004**.

[21] Fuys D., Geddes D., Lovett C.J. and Tischler R., *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*, Journal for Research in Mathematics Education [monograph number 3], Reston, VA: NCTM, **1988**.

[22] Holmes E.E., *New directions in elementary school maths: Interactive teaching and learning*, ublisher unknown, **1995**.

[23] Mayberry J., *An investigation of the van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teacher's unpublished doctoral dissertation*, University of Georgia, Athens, GA, **1981**.

[24] Knight K.C., *An investigation into the change in the van hiele level of understanding geometry of preserves elementary and secondary mathematics teachers*, Unpublished Master's Thesis, University of Main, **2006**.