Tech. Edu. J. 12(3): 171-183, Summer 2018

Technology of Education Journal
(TEJ)
Homepage: jte.sru.ac.ir

Original Research Paper

Investigation of the conception of third-grade female high school students of the concept of limit and continuity

E. Reyhani*, Z. Sharifi

Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University Tehran, Tehran, Iran

Received: 16 January 2018
Reviewed: 19 February 2018
Revised: 2 May 2018
Accepted: 29 May 2018

Keywords:
Conceptual Understanding
APOS Theory
Concept of LIMIT
Third Year of Secondary
Mathematical Education

* Corresponding author
e_reyhani@sru.ac.ir
(+9821) 22970005

ABSTRACT

Background and Objectives: One of the most important concepts in mathematics, which has always been difficult for students to understand, is the concept of limit. Due to the connection of this concept to many other concepts such as infinitely large and infinitesimally small, continuity, derivative and integral, its correct understanding and comprehension is of particular importance and this has led to its teaching and learning by math educators. Although this concept has been explored many times in educational research by researchers, it is still difficult for students to understand.

There are several ways to identify problems in understanding concepts, including the concept of limit. One of these methods is to study how concepts and structures are formed that students create to learn concepts in their minds. The aim of this study is to assess students, understanding of the concept of limit in the third year of secondary school based on the APOS theory. APOS theory is a theory of learning that is used in academic mathematics. The theory categories students' understanding of concept across the levels, and is able to models mental structures that person to understand of the concept.

Methods: This research is a descriptive study using survey. The sample of this research is 234 students in third grade from Qarchak city who have been randomly selected. The instrument is a researcher-made questionnaire with six questions. The reliability of the test was estimated by Cronbach's alpha and is approved in the amount of 0.82.

Findings: The results show that most students do not have a good understanding of the concept of limit and they mostly can do the limit problems correctly, if they have a routine way to solve them. The weak structures affect not only their understanding of the concept, but also depend on the understanding of the concepts such as continuity.

Conclusion: When introducing the concept of limit, the teacher can prevent the construction of correct schemas of the concept of limit by using slang and giving the initial idea. Because the role of the teacher in constructing a concept of limit is very important, if the teacher teaches in an inappropriate way, it may prevent the student from absorbing the concept of limit. Another reason for stopping the growth and development of the concept is the continuous evaluations in educational environments that do not emphasize the need for conceptual understanding of the concepts and are limited to routine methods to achieve better results. For this reason, doing research in the field of teaching and learning any concept in mathematics, such as the concept of limit, can lead to more effective teaching strategies.

NUMBER OF REFERENCES	NUMBER OF FIGURES	NUMBER OF TABLES
21	1	25

مقاله پژوهشی

بررسی درک دانش‌آموزان دختر سال سوم متوسطه از مفهوم حد و پیوستگی

ابراهیم ریحانی*، زهرا شریفی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی تهران، تهران، ایران

چکیده

پیشینه و اهداف: یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات که درک آن از سوی دانش‌آموزان همواره با مشکلاتی همراه بوده است، مفهوم حد است. به دلیل ارتباط این مفهوم به بسیاری از مفاهیم دیگر از جمله بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک ، پیوستگی، مشتق و انتگرال، درک و فهم صحیح آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و همین امر سبب شده است آموزش و یاددهی آن از سوی آموزشگران ریاضی مورد توجه قرار گیرد. گرچه این مفهوم بارها در تحقیقات آموزشی از سوی محققان مورد بررسی قرار گرفته است ولی هنوز هم مشکلات در زمینه درک آن توسط دانش‌آموزان به قوّت خود باقی است. برای شناسایی مشکلات به وجود آمده در زمینهٔ درک مفاهیم از جمله مفهوم حد، روش‌های متعددی وجود دارد. از جمله این روش‌ها، بررسی چگونگی تشکیل مفهوم و ساختارهایی است که دانش‌آموزان برای یادگیری مفاهیم در ذهن خود می‌سازند است. هدف از این مطالعه بررسی درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته تجربی و ریاضی از مفهوم حد بر اساس نظریه APOS است. نظریه APOS یک نظریه یادگیری است که بیشتر در ریاضیات دانشگاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این نظریه درک دانش‌آموزان از مفاهیم را در سطوح مختلف دسته‌بندی می‌کند و قادر است ساختارهای ذهنی که شخص به‌منظور درک مفهوم می‌سازد را مدل‌سازی کند.

روش‌ها: این تحقیق یک تحقیق توصیفی است که به روش زمینه‌یابی انجام شده است. نمونه مورد مطالعه ۲۳۴ دانش‌آموز دختر سال سوم متوسطه شهرستان قرچک هستند که به روش تصادفی طبقه‌ای انتخاب شده‌اند. ابزار آزمون، پرسشنامه‌ای شامل ۶ سؤال است که توسط مؤلفین مقاله طراحی شده است. پایایی آزمون با محاسبه آلفای کرونباخ به میزان ۰/۸۲ مورد تأیید است.

یافته‌ها: نتایج حاصل از تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان درک درستی از مفهوم حد نداشته و مسائل حد را در صورتی درست حل می‌کنند که به یک روش روتین برای حل دسترسی داشته باشند. عملکرد ضعیف دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات آزمون مخصوصاً گروه سوم تجربی این نکته را به‌خوبی مشخص می‌کند که ساخت‌وسازهای مفهوم حد در ذهن اکثر آن‌ها بسیار ناقص است. این ساختارهای ضعیف نه‌تنها بر درک آن‌ها از مفهوم حد تأثیر گذاشته است بلکه بر درک مفاهیم وابسته از جمله پیوستگی نیز مؤثر بوده است.

نتیجه‌گیری: معلم زمانی که به معرفی مفهوم حد می‌پردازد با استفاده از زبان عامیانه و دادن ایدهٔ اولیه، می‌تواند مانع ساخت طرحواره‌های درستی از مفهوم حد شود. چون نقش معلم در ساخت طرحی از مفهوم حد بسیار مهم است، اگر معلم با روشی نامناسب به آموزش بپردازد، ممکن است مانع جذب مفهوم حد توسط دانش‌آموز گردد. علت دیگر توقف رشد و توسعهٔ مفهوم، ارزشیابی‌های مستمر در محیط‌های آموزشی است که نیاز به درک مفهومی مفاهیم را مهم جلوه نداده و محدود به روش‌های روتین برای دستیابی به نتایج بهتر هستند. به همین دلیل پرداختن به تحقیقاتی در زمینهٔ تدریس و یادگیری هر مفهومی در ریاضی مانند مفهوم حد، می‌تواند منجر به ارائه راهکارهایی برای تدریس مؤثرتر شود.

تاریخ دریافت: ۲۶ دی ۱۳۹۶
تاریخ داوری: ۳۰ بهمن ۱۳۹۶
تاریخ اصلاح: ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۷
تاریخ پذیرش: ۸ خرداد ۱۳۹۷

واژگان کلیدی:
درک مفهومی
نظریه APOS
مفهوم حد
سوم متوسطه
آموزش ریاضی

* نویسنده مسئول
e_reyhani@sru.ac.ir
۰۲۱-۲۲۹۷۰۰۰۵

مقدّمه

یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات که درک آن از سوی دانش‌آموزان همواره با مشکلاتی همراه بوده است، مفهوم حد است. به دلیل ارتباط این مفهوم به بسیاری از مفاهیم دیگر از جمله بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک ، پیوستگی، مشتق و انتگرال، درک و فهم صحیح آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و همین امر سبب شده است آموزش و یاددهی آن از سوی آموزشگران ریاضی مورد توجه قرار گیرد. گرچه این مفهوم بارها در تحقیقات آموزشی از سوی محققان مورد بررسی قرار گرفته است ولی هنوز هم مشکلات در زمینه درک آن توسط دانش‌آموزان به قوّت خود باقی است. برخی از محققان از جمله کارنو (Cornu) معتقدند که مشکلاتی که دانش‌آموزان در درک و فهم حد دارند، اغلب ناشی از باورها و ابهامات نادرستی است که دانش‌آموزان نسبت به این مفهوم دارند و برخی دیگر این مشکلات را ناشی از روش‌های تدریس ناصحیح این مفهوم می‌دانند [۱].

برای شناسایی مشکلات به وجود آمده در زمینهٔ درک مفاهیم از جمله مفهوم حد، روش‌های متعددی وجود دارد. از جمله این روش‌ها، بررسی چگونگی تشکیل مفهوم و ساختارهایی است که دانش‌آموزان برای یادگیری مفاهیم در ذهن خود می‌سازند است. بررسی ساختارهای ذهنی

یادگیرندگان در هر سطحی که باشد می‌تواند به آموزشگران ریاضی کمک کند تا بتوانند آموزش مفاهیم را طوری طراحی کنند که منجر به رشد و توسعه مفاهیم در ذهن دانش‌آموزان شود. جهت بررسی ساختارهای شکل‌گرفته در ذهن می‌توان از نظریات یادگیری کمک گرفت. نظریه یادگیری به عقیده وییر (Weyer) پیش‌بینی کردن چگونگی یادگیری افراد است که شامل سطوح متفاوتی از فرایند یادگیری می‌باشد. هدف هر نظریه یادگیری بهبود آموزش و تجربه‌های آموزشی به‌منظور کمک به یادگیرندگان جهت پیشرفت در فرایند یادگیری می‌باشد [۲].

در سال‌های اخیر نظریه‌های آموزشی متعددی در حوزهٔ ریاضی ابداع و معرفی شده‌اند که از بین آن‌ها می‌توان به نظریه عمل- فرآیند- شیء- طرحواره دوبینسکی (Dubinesky) یا دنباله‌ای از مراحل تک ساختاری، تک ساختاری -رابطه‌ای و چند ساختاری در مدل SOLO که بر چارچوب‌های موضعی رشد مفهومی فرد متمرکزند، اشاره کرد. این نظریه‌ها به یک جنبه مفهومی خاص مرتبط‌اند که در آن یادگیرنده تلاش می‌کند اطلاعات در دسترس را بفهمد و با استفاده از تمام ساختارهای شناختی در دسترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید [۳]. تمرکز این مقاله بر نظریه یادگیری عمل- فرآیند- شیء- طرحواره دوبینسکی است که به نظریه یادگیری APOS معروف است و در تحقیقات آموزش ریاضی بسیار کاربرد دارد.

نظریهAPOS که نظریه‌ای ساخت و سازگرایی درباره چگونگی یادگیری و توسعه مفاهیم ریاضی است، به روند یادگیری یک مفهوم ریاضی و ساخته شدن آن در ذهن یادگیرنده توجه دارد. در واقع این نظریه چرخه‌ای از ساخت و ساز مفاهیم را بیان می‌کند که به هنگام یادگیری یک مفهوم ریاضی در ذهن یادگیرنده رخ می‌دهد [۴]. نظریه APOS توسط دوبینسکی در سال ۱۹۹۱ و بر اساس یکی از نظریات پیاژه (Piaget) و در جهت بازسازی آن در فضای ریاضیات دانشگاهی، مطرح شده است. این نظریه بر این فرض استوار است که فرد مفاهیم ریاضی را به‌طور مستقیم نمی‌آموزد، بلکه او برای معنا بخشیدن به یک مفهوم ریاضی از ساختارهای ریاضی استفاده می‌کند. اگر فرد برای یک مفهوم ساختارهای ذهنی مناسب ریاضی داشته باشد یادگیری برای او آسان است ولی اگر ساختارهای ذهنی مناسبی موجود نباشد یادگیری مفهوم تقریباً غیرممکن است [۵]. ساختارهایی که در نظریه APOS به آن پرداخته می‌شود عبارت‌اند از عمل، فرآیند، شیء و طرحواره. به‌عبارت‌دیگر نظریه APOS با عمل‌ها شروع شده، از میان فرایندها حرکت کرده و بعد از تبدیل آن‌ها به اشیاء به طرحواره می‌رسد [۶].

در این تحقیق جهت بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم حد، ابتدا ساختارهای لازم برای درک مفهوم حد را در قالب سطوح نظریه APOS مشخص می‌کنیم. سپس از طریق بررسی ساختارهای ایجاد شده در ذهن دانش‌آموزان، میزان درک آن‌ها از مفهوم حد را خواهیم سنجید. این بررسی به ما کمک می‌کند تا حدی بتوانیم مشکلات ایجاد شده در این زمینه را شناسایی کنیم. در مورد دغدغه ذهنی و تجربی مؤلفان مقاله در انجام تحقیق حاضر و انتخاب مبحث حد، علاوه بر تجارب تدریس در دبیرستان و دانشگاه، عدم وجود پژوهشی در این باره و بکر بودن موضوع، تأثیرگذار بوده است. سؤالاتی که تحقیق حاضر را هدایت می‌کنند عبارت‌اند از:

- درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه از مفهوم حد بر مبنای نظریه APOS چگونه است؟
- آیا بین درک دو گروه شرکت کننده سوم ریاضی و تجربی از مفهوم حد، تفاوت معناداری وجود دارد؟

چارچوب نظری تحقیق

برای اینکه یادگیری رخ دهد، دانش‌آموز باید به لحاظ ذهنی فعال باشد. در کلاس‌های درس، باید دانش‌آموز را به مواجه‌شدن و دست‌وپنجه نرم کردن با ایده‌های جدید، تلاش برای جفت‌وجور کردن آن‌ها با شبکه‌های موجود ذهنی و چالش با دیدهای خود و دیگران، تشویق کرد. به‌طور خلاصه ساختن دانش نیازمند تفکر بازتابی است که همان تفکر فعال درباره آن ایده یا فعالیت ذهنی بر روی آن ایده می‌باشد. تفکر بازتابی به معنای جستجو و بررسی میان ایده‌های موجود به‌منظور یافتن ایده‌هایی است که برای معنا بخشیدن به ایدهٔ جدید سودمندتر به نظر می‌رسد [۷]. این باور از ساختن دانش برگرفته از تفکری است که بیان می‌کند یادگیری فرایندی فعال است که دانش‌آموز در آن برای معنا بخشیدن به یک مفهوم از ساختارهای ذهنی استفاده می‌کند [۸].

این ساختارهای ذهنی که طی آموزش حاصل می‌شوند و توصیفی از نحوهٔ پرورش مفهومی خاص در ذهن یادگیرنده‌اند را تجزیه تکوینی آن مفهوم می‌نامند [۹]. هر تجزیه تکوینی لازمه ساختارهای ذهنی است که در نظریه APOS به‌صورت عمل، فرآیند، شیء و طرحواره می‌باشد که APOS ترکیب حروف اول آن‌هاست. بنابراین دیدگاه، درک و فهم یادگیرنده از مفهومی مشخص می‌تواند در یکی از سطوح عمل و فرآیند و شیء باشد و ممکن است یادگیرنده بتواند طرحواره مفهوم را نیز تشکیل دهد [۵]. در ادامه تعریف دقیق هر یک از سطوح APOS و برای فهم دقیق‌تر مثالی از فهم تابع در هر سطح ارائه شده است.

عمل

عمل، تغییر دادن اشیاء از پیش شناخته‌شده توسط فرد است، درصورتی‌که راه این تغییر به یادگیرنده نشان داده شده باشد. در این مرحله او نیاز صریح به حافظه‌اش دارد تا بتواند برای انجام تکالیف و مسائل به‌صورت گام‌به‌گام از آن استفاده کند [۸].

به‌طور مثال در مورد درک مفهوم تابع، زمانی یادگیرنده در سطح عمل است که بتواند با استفاده از ضابطهٔ تابعی مشخص، مقادیر تابع را برای نقاط خاص مشخص کند. در این مرحله فرد به مانند ماشینی عمل می‌کند که به او دستوری داده شده و با استفاده از داده‌ها و اطلاعاتش فقط قادر به انجام آن دستور است [۱۰]. در این سطح فرد قادر به درک ترکیب توابع، توابع چند ضابطه‌ای، تعریف رسمی تابع و غیره نیست.

فرآیند

زمانی که عملی تکرار می‌شود و شخص بر آن بازتاب می‌کند آن عمل به‌صورت فرآیند درونی می‌شود. در این زمان یادگیرنده برای انجام عملی، دارای ساختار درونی می‌شود. یعنی درونی سازی به شخص این امکان را می‌دهد که از یک عمل آگاه شود و آن را با اعمال دیگر ترکیب کند و یا دو یا چند فرآیند را برای ساختن فرآیند جدید هماهنگ کند. فرآیندها همان ساختار درونی عمل را دارند، اما بدون احتیاج به هدایت توسط محرک خارجی. شخصی که درک فرآیندی از تغییر را دارد می‌تواند بر عمل بازتاب کند، عمل را توصیف کند و حتی گام‌های تغییر را معکوس کند، البته بدون اینکه این گام‌ها را واقعاً انجام دهد. در مقایسه با عمل، فرآیند را دیگر راهنما و محرک بیرونی هدایت نمی‌کند بلکه کنترل در دست یادگیرنده است [۵].

در مورد تابع به عقیده وییر یادگیرنده در این سطح، فرآیند مفهوم‌سازی تابع را انجام می‌دهد. او قادر است به تغییرات تابع به‌عنوان یک فعالیت کامل فکر کند و شیوه کارش را درونی سازد [۲]. او می‌تواند درک کند که تابع مانند فعلی است که می‌تواند کاری انجام دهد. مثلاً در $f(x)=x^2$ یک دانش‌آموز می‌تواند با تعدادی نقطه شکل را رسم کند و درک کند که یک تابع درجه 2 است و نمودار آن سهمی می‌باشد و نیز با مقادیر منفی تابع نزولی و با مقادیر مثبت تابع صعودی خواهد بود.

شیء

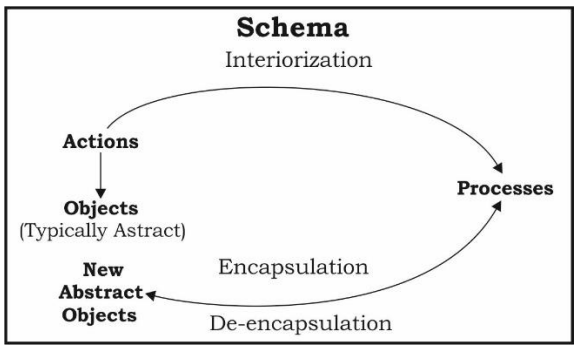
زمانی که شخص از فرایند همانند یک کلیت آگاه می‌شود و پی می‌برد که می‌تواند عمل‌ها را تغییر دهد و حقیقتاً قادر به ساختن چنین تغییراتی باشد، تفکر او از سطح فرآیند به سطح شیء رسیده است یا اصطلاحاً فرآیند در شیء خلاصه شده است. در طول انجام عمل یا فرآیند بر یک شیء اغلب لازم است که شیء را به فرایندهایی که از آن به دست آمده است، گسترده کرد [۸]. گرچه تشکیل شیء یا شیء انگاری وجه اشتراک تمام نظریه‌ها در یادگیری ریاضیات می‌باشد ولی اغلب تصور می‌شود که خلاصه کردن فرآیند به شیء مشکل است و راهبردهای آموزشی لازم برای کمک به دانش‌آموزان جهت برخورد با چنین موقعیت‌هایی وجود ندارد که مهم‌ترین دلیل آن فقدان تجربه‌های لازم برای متناظر کردن عمل‌ها به آنچه به‌عنوان فرایند تعبیر می‌شوند، می‌باشد [۱۱]. البته در سال‌های اخیر توجه زیادی به خلاصه کردن فرایند به شیء به‌عنوان روشی اساسی برای رشد شناختی در تفکر ریاضی شده است [۱۲].

یادگیرنده زمانی در سطح شیء است که از انجام عمل‌هایی که می‌تواند روی برخی توابع انجام شود آگاه گردد. مثلاً در تعریف $h=f+g$ بتواند تابع h را به صورت جمع دو تابع دیگر درک کند. همچنین در توابع ضمنی از جمله $x^2+y^2=25$ که نمودار یک دایره را ارائه می‌کند بتواند متغیر x و y را به هم وابسته کند و بفهمد که این رابطه یک تابع نیست، چون خطوط عمودی را در دو نقطه قطع می‌کند. در اصل می‌توان گفت اگر یادگیرنده بتواند تعریف رسمی تابع را درک کند در این سطح قرار می‌گیرد. به عقیده اسلامی مسلم زمانی یادگیرنده در درک مفهوم تابع در سطح شیء است که بتواند اجرای عملیات روی فرآیندهای تابع را تصور کند، بدون اینکه به تابع‌هایی مشخص رجوع کند، و فرآیندهای تابع را دارای کلیتّی ببیند که عمل‌ها و فرآیندهایی را می‌توان بر آن اعمال کرد [۱۳].

طرحواره

اعمال و فرایندها و اشیا پس از اینکه ساخته می‌شوند، می‌توانند به روش‌های گوناگون در هم تنیده شوند. مثلاً دو یا چند فرآیند ممکن است توسط اتصال به یکدیگر از طریق ترکیب یا شیوه‌های دیگر به هم مربوط شوند. به عبارت دیگر مجموعه‌ای از فرآیندها و اشیاء در نوع ساخت و ساز یافته‌ای به‌صورت یک طرحواره سازمان‌دهی می‌شوند [۸]. از طرفی شخص می‌تواند بر طرحواره‌ها بازتاب کرده و روی آن‌ها عمل کند که منجر به تبدیل شدن طرح واره به شیء جدیدی می‌شود؛ بنابراین اشیاء به دو صورت ساخته می‌شوند، هم از فرایندها و هم از طرحواره‌ها [۱۴].

آرنون (Arnon) و همکاران در شکل ۱ نحوه‌ی عملکرد سطوح APOS و ارتباط آنها با یکدیگر ارائه کرده‌اند.



شکل ۱: چرخه APOS برای دانش‌آموزان متوسطه

Fig. 1: APOS for postsecondary students

همان‌طور که شکل نشان می‌دهد در حیطه‌ی ریاضیات متوسطه و بعد آن، اشیائ اولیه و اشیایی که از خلاصه شدن فرایندها ظاهر می‌شوند، معمولاً انتزاعی هستند. اصطلاح انتزاعی یا مجرد به استفاده یک مفهوم ریاضی بدون هیچ گونه تمثیلی از جهان مادی و فیزیکی گفته می‌شود [۱۵].

در سطح طرحواره یادگیرنده مجموعه‌ای از عمل‌ها، فرآیندها و اشیاء و دیگر طرحواره‌ها دارد که می‌تواند در ارتباط با مفهوم تابع به هم مرتبط کند. او می‌تواند میان سطوح عمل و فرآیند و شیء و طرحواره تابع عقب و جلو برود. برای یادگیری مفاهیم دیگر از جمله حد و مشتق، یادگیرنده باید بتواند طرحواره مناسبی از مفهوم تابع داشته باشد [۲].

ایده طرحواره بسیار مشابه با ایده تصوّر مفهومی است که تال و وینر (Vinner) در «تصوّر مفهوم، تعریف مفهوم» در ریاضی بیان کردند. به عقیده آن‌ها تصوّر مفهومی یعنی اطلاعاتی که مفهوم را برای فرد

مشخص می‌کند، نظیر نمودارها، نمادها و نمایش‌های کلامی یا اطلاعات عددی و یک مجموعه از خواص وابسته به این مفهوم. تصوّر مفهوم طی سال‌ها، از طریق انواع تجارب شکل می‌گیرد و در مواجهه شخص با محرک‌های جدید تغییر می‌کند و کامل‌تر می‌شود. این ایده در مقابل تعریف مفهوم قرار دارد که برای مشخص کردن مفهوم مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۶].

پس از معرفی این نظریه و اجزای آن، تأکید این نکته ضرورت دارد که به نظر بنیان‌گذاران این نظریه، گرچه تجزیه تکوینی از مفاهیم نظری در مدل‌سازی از ساختارهای ذهنی که شخص به‌منظور درک مفهوم می‌سازد مؤثر است، اما هیچ راه پیشنهادی برای توصیف دقیق ساختارهایی که عملاً ساخته می‌شود وجود ندارد، یعنی نه‌تنها این نظریه که سایر نظریه‌ها هم قادر نیستند آنچه واقعاً در ذهن افراد می‌گذرند را آشکار کنند.

پیشینه تحقیق

پیشینه این تحقیق بر تحقیقاتی متمرکز است که در سال‌های اخیر روی مفاهیم مختلف در چارچوب نظریه APOS انجام شده است.

مطالعه‌ی موردی که روی چهار دانشجوی توسط مارتینز (Martinez) و پاراگوئز (Parraguez) انجام شد نشان داد که استفاده از نظریه APOS به عنوان چارچوب تحقیق، سبب ایجاد وتولید فعالیتهای مورد نیاز برای آموزش مستمر در ریاضیات دانشگاهی می‌شود. چون اطلاعات بدست آمده بر پایه شواهدی است که نشان می‌دهد فرایندهای ذهنی دانش‌آموزان قابل پیش بینی و کنترل است [۱۷].

براون (Brown)، دوریس (Devries)، دوبینسکی و تامس (Thomas) در تحلیلی بر مبنای چارچوب APOS با بررسی یادگیری دانشجویان دو کلاس جبر (یکی با برنامه سنتی و دیگری با برنامه آزمایشی) سعی کردند توضیح دهند یادگیری مفاهیم «عمل دوتایی گروه» و «زیر گروه» چگونه رخ می‌دهد. در درس آزمایشی، از رایانه هم استفاده شد و یاد گیرندگان در آزمایشگاه رایانه، با مفاهیمی که هنوز در کلاس به طور رسمی تعریف نشده بود، با نوشتن برنامه‌های رایانه‌ای آشنا می‌شدند. تحلیل اولیه براون و همکارانش دربارهٔ شکل گیری مفهوم عمل دوتایی چنین بود:

وقتی یاد گیرنده عمل دوتایی را در سطح عمل درک می‌کند، باید دستوری صریح (مانند جمع به پیمانه) موجود باشد. منظور از عمل دوتایی عام، عمل دوتایی است که روی گروهی نامشخص وجود دارد و دستوری برای آن داده نشده است. اگر یادگیرنده بتواند در مورد عمل دوتایی عامی که بر دو شیء (عضو گروه) اعمال می‌شود، فکر کند، عمل دوتایی را در سطح فرآیند شناخته است. اگر یادگیرنده بتواند بین چند عمل دوتایی مختلف تمایز قائل شود و چند عمل دوتایی را روی یک مجموعه در نظر بگیرد عمل دوتایی را در سطح شیء دریافته است. وقتی یادگیرنده طرحواره عمل دوتایی دارد، می‌تواند با انگیختن طرحواره‌اش از فرآیند و شیءِ عمل دوتایی در مسائل مختلف بهره بگیرد. بدین ترتیب، با درک عمل دوتایی در سطح فرآیند، یادگیرنده آگاه است که باید هم به دامنه عمل دوتایی توجه کند و هم به خود عمل. وقتی یادگیرنده عمل دوتایی را در سطح شیء می‌فهمد، قادر است به فرآیند بازگردد تا عملیات لازم را (مثلاً در بررسی ویژگی) اجرا کند. با انگیختن طرحواره عمل دوتایی یادگیرنده محیطی (ذهنی) فراهم می‌کند که در آن فقط با عمل دوتایی خاصی که مسئله ایجاب می‌کند، کار کند، اما می‌تواند در زمان مقتضی، به محیط‌های (اعمال دوتایی) دیگر توجه کند. گویی این تغییر توجه، عملی است که بر طرحواره عمل دوتایی اعمال می‌شود. بنابراین این امر زمانی ممکن است که طرحوارهٔ عمل دوتایی ملموس شده باشد.

نتایج این تحقیق نشان داد که دانشجویانی که در درس آزمایشی شرکت کرده بودند، در حد خوبی از پس یادگیری مطالب ارائه شده برآمدند. دست کم یک سوم آن‌ها در درک مفاهیم عمل دوتایی، گروه و زیر گروه کاملاً موفق بودند و بقیه هم پیشرفت چشمگیری داشتند. نتیجه این تحقیق در مورد آموزش مباحث عمل دوتایی، گروه و زیر گروه این است که روش آموزشی که به کار گرفته شده، در یادگیری دانشجویان اثر مناسبی داشته است و ادامه دادن رویکرد کلی این روش موجه است. البته لازم است برای اینکه یاد گیرندگان بهتر بتوانند طرح واره‌های زیر مجموعه و زیر گروه را هماهنگ کنند، در روش تغییراتی صورت بگیرد. ممکن است طرحواره‌های قبلی یاد گیرندگان در بعضی موارد کافی باشد و در موارد دیگر همچون مفهوم مرکز گروه ناکافی باشد [۱۸].

ماهاراج (Maharaj) نیز سه تحقیق روی مفاهیم حد و مشتق و انتگرال در چارچوب APOS انجام داده است [۲۱-۱۹]. او در تحقیقی روی مفهوم حد تابع بین ۸۶۸ دانشجو در آفریقای جنوبی نشان داد که حد، مفهومی است که دانش‌آموزان در فهم و بیان آن دچار مشکل می‌شوند و این مشکل احتمالاً به خاطر این است که آنان ساختار مناسبی در سطح عمل، فرآیند و شیء و طرحواره ندارند. ماهاراج ساختارهای ذهنی لازم برای درک مفهوم حد را به‌صورت زیر شرح داده است:

یادگیرنده‌ای که در سطح عمل است برای محاسبه حد توابع زمانی که $x \to a$ فقط قادر است مقادیر نزدیک به a را در $f(x)$ جایگزین کند و مقادیر نظیر آن را به دست آورد. در سطح فرایند یادگیرنده قادر است برای محاسبه $\lim_{x\to a} f(x)$ یک فرآیند ذهنی از حد تابع برای مقادیری از x که به a نزدیک می‌شود بسازد و با توجه به مقدارهای ورودی و تغییرات آن مقادیر خروجی را تولید کند. مثلاً به دست آوردن حد توابع چند ضابطه‌ای در نقاط مرزی در این سطح قرار می‌گیرد. در سطح شیء ممکن است یادگیرنده با مسائلی برخورد کند که نیازمند به‌کارگیری اعمال یا فرآیندهای گوناگون باشد از جمله محاسبه حدهایی همچون $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|}$ یا $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x}$. همچنین یادگیرنده عملاً می‌تواند با توجه به درونی شدن فرآیندها و خلاصه شدن آن‌ها قادر به درک تعریف رسمی $(\varepsilon-\delta)$ باشد. در سطح طرحواره یادگیرنده قادر است عمل‌ها و فرآیندها و اشیاء را به‌صورت منسجم و یکپارچه

سازمان‌دهی کند و حد توابع در بازنمایی‌های مختلف از جمله به‌صورت جبری و نموداری محاسبه کند. یا مثلاً برای محاسبه حد تابع ابتدا شکل آن را رسم کند و سپس حد آن را با توجه به تغییرات نمودار به دست آورد. برای درک مفاهیم دیگر از جمله مشتق و انتگرال یادگیرنده باید طرحوارهٔ مناسبی از حد تشکیل دهد و این طرحواره را به شکل شیء برای درک مفاهیم دیگر ملموس کند.

یافته‌های مطالعه ماهاراج نشان داد که دانشجویان حد را به‌سختی درک می‌کنند و تأکید کرد که این احتمالاً پیامد این است که بسیاری از آن‌ها ساختار ذهنی مناسبی در سطح فرآیند و شیء و طرحواره ندارند [۱۹]. در تحقیقی که ماهاراج در سال ۲۰۱۳ روی ۸۵۷ دانشجو در آفریقای جنوبی در مورد درک آن‌ها از مفهوم مشتق انجام داد، نشان داد که شیء مشتق در ذهن حدود ۳۰ درصد دانشجویان تشکیل شده است. یافته‌های او در این تحقیق مشخص کرد که برای کمک به دانشجویان در توسعه ساختارهای ذهنی در سطح شیء و طرحواره زمان و برنامه‌ریزی مناسبی نیاز است و این بدان معنی است که آموزش مفاهیم نباید محدود به بازنمایی کلامی و جبری باشد. اگر آموزش همراه با رویکردهای گرافیکی باشد رشد و توسعه ساختارهای ذهنی از فرایند به شیء را تسهیل می‌کند [۲۰].

تحقیق دیگر ماهاراج در سال ۲۰۱۴ که روی مفهوم انتگرال انجام شد، بر توصیف پاسخ دو دانش‌آموز متمرکز بود که برای اجرای بهتر روند تحقیق از تکنیک مصاحبه نیز استفاده شد. یافته‌های این تحقیق نشان داد که اشتباهات ایجاد شده توسط دانش‌آموزان همواره ناشی از نداشتن یک طرحواره مناسب برای تمایز قائل شدن بین انواع انتگرال‌های مختلف است [۲۱].

روش تحقیق

این پژوهش به روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی انجام گرفته است و جامعه آماری آن، کلیه دانش‌آموزان دختر سال سوم متوسطه شهرستان قرچک می‌باشند که در سال تحصیلی ۹۴-۱۳۹۳ در رشته‌های ریاضی و تجربی مشغول به تحصیل بوده‌اند. فراوانی جامعه مورد نظر ۵۱۸ نفر می‌باشد که ۲۳۴ نفر از آن‌ها به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند که ۹۱ نفر رشته ریاضی و ۱۴۳ نفر رشته تجربی می‌باشند. پرسش‌نامه تحقیق حاضر، در اسفند سال ۱۳۹۳ که مبحث حد در کتاب حسابان و ریاضیات سوم تجربی به پایان رسیده بود، در بین دانش‌آموزان اجرا شد.

ابزار گردآوری داده‌ها

در این پژوهش برای گردآوری داده‌ها از ابزار پرسش‌نامه استفاده شد که طراحی آن توسط مؤلفان مقاله انجام گرفت. روایی صوری و محتوایی پرسش‌نامه توسط تعدادی از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی تأیید گردید و با استفاده از نرم‌افزار SPSS، ضریب آلفای کرونباخ پرسش‌نامه ۰/۸۲ به دست آمد که این مقدار وضعیت مناسبی را در مورد پایایی آن نشان می‌دهد. این پرسش‌نامه شامل شش سؤال تشریحی است و به هر یک از سؤالات بر اساس قسمت‌های سؤال بارم ۰ الی ۶ نمره اختصاص داده شده است. سنجش میزان درک دانش‌آموزان بر اساس نمراتی که از آزمون دریافت کرده و همچنین نوع پاسخی که به سؤالات داده‌اند ارزیابی شده است. همچنین برای بررسی میزان درک دانش‌آموزان از مفهوم حد جدولی بر اساس تحقیقات قبلی روی مفهوم تابع و حد بر اساس سطوح APOS تشکیل داده و پاسخ‌های دانش‌آموزان را بر این اساس سنجیده شد.

جدول ۱: طبقه بندی مفاهیم تابع و حد بر اساس تحقیقات دوبینسکی، مکدونالد، ویر و ماهاراج

Table 1: Classification of the concept of function and limit based on Dobinsky, Mcdonald, Weyer and Maharaj.

Concept	Level	Describe understanding of concept
Function	Action	Find values of function if their criteria are specific (single criteria) draw a simple linear function, detection of the function from a regulare couple.
	Process	Find values of function in multi criteria function, draw second-degree, function using transfer, detect function from diagram, draw multi criteria function in completely for example drawing one or more parts of the function correctly.
	Object	Detecting the function statement from its graph, draw multi criteria function in correctly, domain and range detection functions, understanding the formal definition of function.
	Schema	Apply between function such as fertility and so on, moving between the various representation of the function and their abilities to transform and each other.
Limit	Action	Calculation of the limit of the function obtained by combing values to the point where it is requested and calculate the limit through the function.
	Process	Find the limit of multi criteria function at border points, find function, limit at the point if it is not defined at the same point, find the function limit on the chart, calculate the left and right of function, for the two criterion function, detect the existence of limit through for the left and right side of function.
	Object	Detecting the existence of a limit in both representations of drawing a shape and a statement simultaneously.
	Schema	Calculating infinity limit or limit in infinity, detection of function continuity and investigation of the cause of continuity.

تجزیه‌وتحلیل داده‌ها

تحلیل سؤال اول

در این سؤال سه مفهوم تابع و حد و پیوستگی مورد سنجش قرار می‌گیرد که هر کدام در یکی از سطوح عمل یا فرایند یا شیء قرار می‌گیرند. نتایج تجزیه و تحلیل سؤال ۱ بر اساس درصد پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان در سه جدول شماره ۲ و ۳ و ۴ به ترتیب ارائه شده است.

۱ -توابع زیر را در نظر گرفته و به سؤالات آن پاسخ دهید.

$$h(x)=\begin{cases}2+x & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$$ و $g(x)=2x+1 \quad ,x\neq 2$ و $f(x)=2x+1$

A) مقادیر روبرو را در صورت وجود به دست آورید. $h(2)=\square \quad f(2)=\square \quad g(2)=\square$

B) حدهای زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x\to 2} f(x)=\square \quad \lim_{x\to 2} h(x)=\square \quad \lim_{x\to 2} g(x)=\square$

C) کدام تابع در $x=2$ پیوسته است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

جدول ۲: نتایج سوال ۱ قسمت A بر اساس APOS به درصد

Table 2: Result of question 1 part A based on APOS and percentage

$h(2)$	$g(2)$	$f(2)$	Part of question
Function	Function	Function	Concept
Process	Process	Action	Intelligibility major
79.12	43.95	98.9	3rd of Math
68.53	11.18	90.9	3rd of Science
72.64	23.93	90.01	Total

جدول ۳: نتایج سوال ۱ قسمت B بر اساس APOS به درصد

Table 3: Result of question 1 part B based on APOS and percentage

$\lim_{x\to 2} h(x)$	$\lim_{x\to 2} g(x)$	$\lim_{x\to 2} f(x)$	Part of question
Limit	Limit	Limit	Concept
Process	Process	Action	Intelligibility major
67. 03	86.81	93.40	3rd of Math
55.24	81.81	83.39	3rd of Science
59.82	83.76	87.60	Total

جدول ۴: نتایج سوال ۱ قسمت C بر اساس APOS به درصد

Table 4: Result of question 1 part C based on APOS and percentage

Express reason of continuity	Distinguish continuity	Part of question
Object level of limit concept to level schema	Object level of limit concept	Intelligibility major
47.25	54.94	3rd of Math
19.58	22.37	3rd of Science
30.34	35.04	Total

عملکرد دانش‌آموزان در پاسخگویی به قسمت‌های مختلف این سؤال نشان می‌دهد که ضعف دانش‌آموزان در پاسخ به قسمت‌های مربوط به حد، بیشتر مرتبط با درک ناقص آن‌ها از مفهوم تابع است. دامنه و برد توابع نیز برای دانش آموزان چالش برانگیز است. دانش آموزان توابع چند ضابطه‌ای را به درستی نمی‌شناسند و طبیعی است که در کار با آن‌ها و محاسبه حد آن‌ها مشکل داشته باشند. همچنین از نظر برخی دانش آموزان حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در آن نقطه تفاوتی ندارند. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال اول در جدول ۵ ارائه گردیده است.

تحلیل سؤال ۲

۲- A) نمودار زیر مربوط به کدام ضابطه داده شده است؟

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & x>0\\ (x-1)^2 & x\leq 0\end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases}2x+2 & x<0\\ x^2-2x+1 & x>0\end{cases} \quad g(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x>0\\ 2x+2 & x\leq 0\end{cases}$$

B) آیا تابع داده‌شده در $x=0$ حد دارد؟ دلیل خود را توضیح دهید.

جدول ۵: نمونه‌هایی از پاسخهای دانش آموزان به سوال ۱
Table 5: Some examples of students' responses to question 1

Level	Answers	Example	Part	Quastion1
Action level of function concept	$f(2)=5$	Farzaneh	Calculate $f(2)$	A
Lower than Action level of function concept	$f(2)=4$	Fatemeh		
Action level of function concept	non	Maryam	Calculate $g(2)$	
Lower than Action level of function concept	$g(2)=5$	Mina		
process level of function concept	$h(2)=3$	Somayeh	Calculate $h(2)$	
Lower than process level of function concept	$h(2)=4$	Mahdiyeh		
Action level of limit concept	$\lim_{x\to 2} f(x)=5$	Fatemeh	Calculate $\lim_{x\to 2} f(x)$	
Lower than Action level of limit concept	$\lim_{x\to 2} f(x)=4$	Somayeh		
process level of limit concept	$\lim_{x\to 2} g(x)=5$	Tahereh	Calculate $\lim_{x\to 2} g(x)$	B
Lower than process level of limit concept	$\lim_{x\to 2} g(x)=$ Non	Akram		
Lower than process level of limit concept	$\lim_{x\to 2} g(x)=4$	Fatemeh		
process level of limit concept	$\lim_{x\to 2} h(x)=4$	Maryam		
Lower than process level of limit concept	$\lim_{x\to 2} h(x)=3$	Mahsa	Calculate $\lim_{x\to 2} h(x)$	
Lower than process level of limit concept	$\lim_{x\to 2} h(x)=5$	Mina		
Level object of limit concept. Distinguish the function correctly but not enough reason.	because it has been defined in all $f(x)$ parts.	Farzaneh		
Lower than process level of limit concept. Cause maybe $g(2)$ or $\lim_{x\to 2} g(x)$ was calculated wrongly.	$g(x)$ because the function amount is equal with it limitation	Haniyeh	Distinguish Continuity and Express reason	C
Updatable Object level to Schema level of limit	because it is the only function $f(x)$ which the amount of it equal with its limit and has the continuity condition.	Mina		

جدول تجزیه‌وتحلیل سؤال ۲ بر اساس درصد پاسخ‌های صحیح در جدول‌های شماره ۶ و ۷ ارائه شده است.همان‌طور که نتایج در جدول نشان می‌دهد، بیشترین ضعف دانش‌آموزان در پاسخگویی به این سؤال مربوط به تشخیص ضابطه تابع است. برخی دانش‌آموزان بدون در نظر گرفتن ضابطه تابع مورد نظر و با تکیه بر نمودار توانسته‌اند به قسمت دوم سؤال پاسخ صحیح دهند.

جدول ۶: نتایج سوال ۲ قسمت A بر اساس APOS به درصد
Table 6: Result of question 2 part A based on APOS and percentage

Function	Function	Concept
Lower than object	Object	Intelligibility major
18.69	81.31	3rd of Math
43.36	56.64	3rd of Science
33.77	66.23	Total

گرچه دید شهودی و نمودار تابع به محاسبه حد کمک کرده است اما ارتباط بین ضابطه و نمودار تابع حاصل نشده است.

نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۲ در جدول شماره ۸ ارائه شده است.

جدول ۷: نتایج سوال ۲ قسمت B بر اساس APOS به درصد

Table 7: Result of question 2 part B based on APOS and percentage

Those who could gave a good reason for all 3 parts.	Those who could gave a good reason for part B	Those who couldn't distinguish the function but they could calculate the limitation	Type of people answer
Limit	Limit	Limit	Concept
Process to updatable to object	Process	Action to updatable to process	Intelligibility major
67.03	72.52	5.49	3rd of Math
39.86	51.74	11.88	3rd of Science
50.42	59.82	9.40	Total

تحلیل سوال ۳

۳- تابع $f(x)=\begin{cases}-x+2 & x>2\\ -2 & x=2\\ x-3 & x<2\end{cases}$ **را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.**

الف) مقادیر روبرو را محاسبه کنید. $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\square$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\square$ **ب) آیا تابع** $f(x)$ **در** $x=2$ **حد دارد؟ چرا؟**

ج) شکل تابع را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید. د) آیا تابع در $x=2$ **پیوسته است؟ چرا؟**

جدول ۸: نمونه‌هایی از پاسخهای دانش آموزان به سوال ۲

Table 8: Some examples of students' responses to question 2

Levels	Answers	Example	Part	Question2
Object level of function concept	$g(x)$	Maryam		
Lower than object level of function concept	$f(x)$	Fatemeh	Distinguish the function of the graph	A
Lower than object level of function concept	$h(x)$	Zeynab		
Lower than object level of function concept	$k(x)$	Raziyeh		
Updatable level of process to level of object	No because $\lim_{x\to 0^+} g(x)=(0-1)^2=1$ $\lim_{x\to 0^-} g(x)=2\times 0+2=2$ So the limit are not equal function doesn't have limit	Maryam		
Updatable level of action to level of process	No because $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2\times 0+2=2$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=(0-1)^2=1$ So it doesn't limit	Fatemeh	Distinguish the limit and express reason	B
Updatable level of process to level of object	because the left and right limit of the $g(x)$ function plot are not equal so it doesn't have limit	Nasrin		

برای حل قسمت اول سؤال ۳ چون نموداری از تابع در دست نمی‌باشد، دانش‌آموز برای حل این قسمت احتمالاً به روش‌های الگوریتمی استناد می‌کند و اگر بتواند حد چپ و راست را به‌طور صحیح محاسبه کند، در سطح فرآیند از مفهوم حد تابع قرار می‌گیرد. خلاصه نتایج بررسی قسمت‌های مختلف سؤال ۳ بر اساس درصد پاسخ‌های صحیح در جدول ۹ تا ۱۲ ارائه شده است.از این لحاظ می‌گوییم دانش‌آموزانی که به قسمت د پاسخ صحیح داده‌اند در سطح شیء از مفهوم حد قرار دارند که این دسته از افراد یا دو شیء به‌دست‌آمده در سمت الف و مقدار تابع را مقایسه کرده و به نتیجه صحیح رسیده‌اند و یا از روی رسم نمودار به عدم پیوستگی تابع در این نقطه پی برده‌اند که در هر دو صورت فرد در سطح شیء از مفهوم حد قرار خواهد گرفت. اما اگر به تمامی قسمت‌های سؤال ۳ پاسخ صحیح داده باشد، درک و فهم او از سطح شیء گذشته و به سطح طرح‌واره از مفهوم حد و سطح عمل از مفهوم پیوستگی رسیده است که البته با توجه به نتایج درصد کمی از دانش‌آموزان به این سطح رسیده‌اند. در ادامه نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۳ در جدول ۱۳ ارائه گردیده است.

جدول ۹: نتایج سوال ۳ قسمت A بر اساس APOS به درصد

Table 9: Result of question 3 part A based on APOS and percentage

Those who calculate both part of limit	Those who calculate right limit correctly	Those who calculate left limit correctly	Type of answer
Limit	Limit	Limit	Concept
Process	Action	Action	Intelligibility major
81.31	86.81	81.31	3rd of Math
58.04	81.11	75.52	3rd of Science
67.09	83.3	77.7	Total

جدول ۱۰: نتایج سوال ۳ قسمت B بر اساس APOS به درصد

Table 10: Result of question 3 part B based on APOS and percentage

Updatable level of Process to level of object	Process	Intelligibility major
68.13	72.52	3rd of Math
52.44	67.13	3rd of Science
61.11	69.23	Total

جدول ۱۱: نتایج سوال ۳ قسمت C بر اساس APOS به درصد

Table 11: Result of question 3 part C based on APOS and percentage

Those who just draw all parts of function	Those who just draw a correct plot for	Those who just draw a correct plot left limit	Those who just draw a correct plot right limit	Type of answer
Function	Function	Function	Function	Concept
Object	Process	Process	Process	Intelligibility major
38.46	52.74	51.64	56.04	3rd of Math
13.98	16.08	18.88	20.27	3rd of Science
23.5	30.34	31.62	34.18	Total

جدول ۱۲: نتایج سوال ۳ قسمت D بر اساس APOS به درصد

Table 12: Result of question 3 part D based on APOS and percentage

Those who replied parts all correctly	Those who replied part D correctly	Type of answer
Limit and continuity	Limit	Concept
Schema and action of continuity	Object	Intelligibility major
29.67	60.53	3rd of Math
8.39	59.44	3rd of Science
16.66	59.82	Total

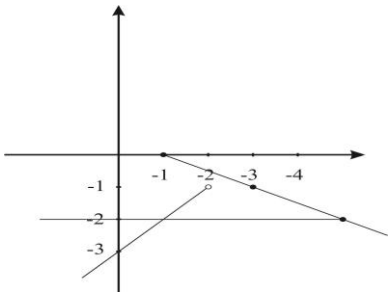
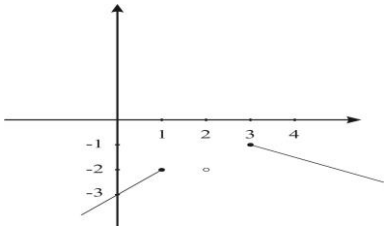
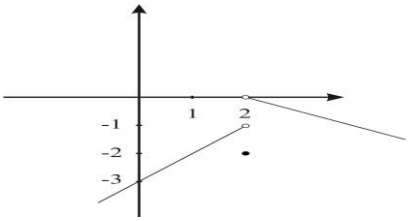
تحلیل سوال ۴

۴- تابع $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

A) $f(3)=\square$ B) $\lim_{x\to 3} f(x)=\square$ C) آیا حد تابع در نقطه $x=3$ وجود دارد؟ چرا؟

جدول ۱۳: نمونه‌هایی از پاسخهای دانش آموزان به سوال ۳

Table 13: Some examples of students' responses to question 3

Levels	Answers	Example	Part	Question 3
Process of limit	$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$	Maryam	Calculate $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)$	A
Process of limit lower than	$\lim_{x\to 2^+} f(x)=-2^+ +2=0^+$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=2^- -3=-1^-$	Fatemeh		
Process of limit lower than	No because function is not calculated in number 2	Haniyeh	Distinguish the limit and Express reason	B
Level process of limit update to object limit	No because left and right limit are not equal	Farzaneh		
Object of function lower than		Zahra	Draw graph	C
Lower than level of function object update to level object function		Mahsa		
Object of function level		Mina		
Lower than level of limit object update to level schema limit	It doesn't have continuity because the left and right limit of function are not equal	Zahra	Distinguish the continuity and express reason	D
Object of limit lower than	No, it is continuity function when the graph is two separate lines.	Mahsa		

نتایج بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۴ در جدول ۱۴ ارائه شده است.

در قسمت C، چون دانش‌آموز تناقضی بین مقادیر $f(3)$ و $\lim_{x\to 3} f(x)$ می‌بیند، ممکن است تصور کند که تابع در $x=3$ حد ندارد که در این صورت فهم او از مفهوم **حد** در همان سطح عمل قرار دارد، ولی اگر بتواند بین مقادیر $\lim_{x\to 3} f(x)$ و $f(3)$ تمایز قائل شود و تفاوت آن‌ها را درک کند، می‌توان گفت فهم او به سطح شیء ارتقاء پیدا کرده است.

نتایج بررسی قسمت C سؤال ۴ در جدول ۱۵ ارائه شده است. اختلاف درصدی که بین افرادی که قسمت B را درست حل کرده‌اند و افرادی که قسمتC را درست حل کرده‌اند وجود دارد به این خاطر است که حدود ۵۰ درصد از افراد که حد تابع را به‌صورت روتین به دست آورده‌اند، هنوز درک خوبی از مفهوم حد نداشته و احتمالاً در این زمینه بدفهمی‌هایی نیز دارند و هنوز نمی‌توانند بین حد تابع و مقدار تابع تمایز قائل شوند. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۴ در جدول ۱۶ ارائه شده است.

تحلیل سوال ۵

۵- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x>0\\ -2x+2 & x\le 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع را رسم کنید. ب) حد تابع $f(x)$ را در $x=0$ بیابید.

جدول ۱۴: نتایج سوال ۴ قسمت A,B بر اساس APOS به درصد

Table 14: Result of question 4 parts A and B based on APOS and percentage

Part of question	Calculate $f(3)$	Calculate $\lim_{x\to 3} f(x)$
Concept	Function	Limit
Intelligibility major	Action	Action
3rd of Math	9.89	82.41
3rd of Science	2.79	75.52
Total	5.55	78.20

جدول ۱۵: نتایج سوال ۴ قسمت C بر اساس APOS به درصد

Table 15: Result of question 4 part C based on APOS and percentage

Concept	Limit
Intelligibility major	Object
3rd of Math	31.86
3rd of Science	32.16
Total	32.05

حل صحیح قسمت الف دانش‌آموز را در سطح شیء از مفهوم تابع قرار می‌دهد. چون رسم $y=x^2+2$ برای $x>0$ به مفهوم جابجایی شیء $y=x^2$ به اندازهٔ دو واحد به سمت بالای محور xها و رسم $y=-2x+2$ به مفهوم جابجایی شیء $y=x$ می‌باشد. دانش‌آموزانی که فقط یک قسمت را صحیح رسم کرده‌اند در سطح فرایند از مفهوم تابع قرار خواهند گرفت. نتایج قسمت الف در جدول ۱۷ ارائه گردیده است.

در قسمت **ب**، اگر دانش‌آموز برای محاسبه حد از ضابطهٔ تابع استفاده کند، در سطح فرآیند از مفهوم حد قرار می‌گیرد، چون هم حد چپ و هم حد راست از روی ضابطه قابل محاسبه است.

حال اگر دانش‌آموز هم به الف و هم به ب پاسخ صحیح داده باشد، سطح او از فرایند به سطح شیء قابل ارتقاء است چون از ارتباط بین شکل تابع و حد تابع در یک نقطه کاملاً آگاه است و در آن تناقضی نمی‌بیند.

نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۵ در جدول ۱۹ ارائه شده است.

تحلیل سوال ۶

۶- دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

(ضابطه تابع اول و نمودار تابع دوم ارائه شده‌اند)

$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ و $g(x)$

الف) $\lim_{x\to 1} f(x)=$ ☐ و $\lim_{x\to 1} g(x)=$ ☐

ب) $f(1)=$ ☐ و $g(1)=$ ☐

ج) این دو تابع را از دیدگاه‌های زیر با هم مقایسه کنید: 1 - دامنه 2 - برد 3 - مقدار حد آن‌ها در نقطه 1 4- مقادیر توابع در نقطه 1 5) نمودار

د) از مقایسه این دو تابع چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جدول ۱۶: نمونه‌هایی از پاسخهای دانش آموزان به سوال ۴

Table 16: Some examples of students' responses to question 4

Levels	Answers	Example	part	Qustion4
Action of function	$f(3)=$ Non	Atiyeh	Calculate $f(3)$	A
Lower than action of function	$f(3)=0$	Nazanin		
Lower than action of function	$f(3)=\frac{0}{0}$	Maryam		
Object of limit	$\to\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0}$ $\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$	Parnia	Calculate $\lim_{x\to 3} f(x)$	B
Lower than object of limit updatable to object of limit	$x+3=9$ $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0}$	Niyayesh		
Object of limit	Yes, because the function is bounded in the neighborhood of 3.	Fatemeh	Distinguish the limit and express reason	C
Lower than object of limit	No because it is ambiguous	Farzaneh		
Lower than object of limit	No because the amount of function and limit are not equal	Fatima		
Lower than object of limit updatable to object of limit	Yes the limit is 6 because we have been able to resolve the ambiguity.	Mahsa		

جدول ۱۷: نتایج سوال ۵ قسمت A بر اساس APOS به درصد
Table 17: Result of question 5 part A base on APOS and percentage

Those who draw the function completely	Those who just draw left part of limit	Those who just draw right part of limit	Type of answer
Function	Function	Function	Concept
Object	Process	Process	Intelligibility major
35.16	67.03	46.15	3rd of Math
26.57	30.06	38.46	3rd of Science
29.91	44.44	41.45	Total

جدول ۱۸: نتایج سوال ۵ قسمت B بر اساس APOS به درصد
Table 18: Result of question 5 part B based on APOS and percentage

Those who gave answer to question 5 completely	Those who gave answer to part B correctly	Type of answer
Limit	Limit	Concept
Process to object	Process	Intelligibility major
31.86	65.93	3rd of Math
20.97	60.13	3rd of Science
20.21	62.39	Total

حل صحیح قسمت الف در سطح فرآیند از مفهوم حد است. چون در هر دو حالت $f(x)$ و $g(x)$ نیاز به فهم بالاتر از سطح عمل دارد.

نتایج بررسی پاسخ‌ها به قسمت الف سؤال ۶ در جدول ۲۰ ارائه شده است.

جدول ۲۰: نتایج سوال ۶ قسمت A بر اساس APOS به درصد
Table 20: Result of question 6 part A based on APOS and percentage

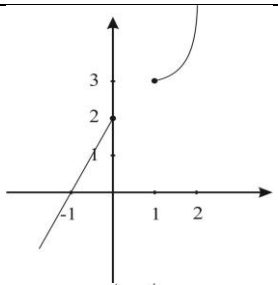
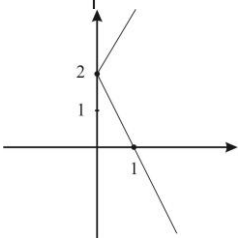
$\lim_{x\to 1} g(x)$	$\lim_{x\to 1} f(x)$	Part
Limit	Limit	Concept
Process	Process	Intelligibility major
49.45	50.54	3rd of Math
30.06	48.25	3rd of Science
37.6	49.13	Total

حل صحیح قسمت ب در سطح عمل تابع قرار دارد. نتایج بررسی پاسخ‌ها به قسمت ب سؤال ۶ در جدول ۲۱ ارائه شده است.

جدول ۲۱: نتایج سوال ۶ قسمت B بر اساس APOS به درصد
Table 21: Result of question 6 part B based on APOS and percentage

$g(1)$	$f(1)$	Part
Function	Function	Concept
Action	Action	Intelligibility major
59.34	72.52	3rd of Math
39.16	46.85	3rd of Science
47.0	56.83	Total

جدول ۱۹:. نمونه‌هایی از پاسخهای دانش آموزان به سوال ۵
Table 19: Some examples of students' responses to question 5

Levels	Answers	Example	Part	Question5
Lower than object function		Fatemeh	Draw graph	A
Lower than object function(maybe in level Action)		Parvaneh		
Process of limit	It has only left limit $\lim_{x\to 0^-} f(x)=2$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=$ Non	Fatemeh	Calculate limit of function in zero	B
Level process of limit update to level object limit(if draw function correctly)	It has limit because $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0^2+2=2$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-2\times 0+2=2$	Farzaneh		

قسمت ج نیاز به تحلیل بیشتری دارد. در این قسمت دانش‌آموز با قسمت‌های متفاوتی روبرو می‌شود که دانش او را می‌سنجد. در قسمت مقایسه دامنه‌ها دانش‌آموز باید از روش‌های یافتن دامنه تابع در حالت‌های مختلف از جمله توابع دوضابطه‌ای و گرافیکی آگاه باشد، همچنین در تعیین برد تابع نیز باید بتواند برد توابع ساده از این نوع را تشخیص دهد و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کند. اگر دانش‌آموز بتواند دامنه و برد تابع $f(x)$ و $g(x)$ را صحیح به دست آورد در سطح شیء از تابع قرار می‌گیرد. پاسخ صحیح دادن به قسمت ۳ و ۴ منوط به صحیح پاسخ دادن قسمت الف و ب می‌باشد. در قسمت ۵ دانش‌آموز باید بتواند نمودار تابع $f(x)$ را رسم کند که وابسته به درک او از مفهوم تابع و رسم نمودار آن می‌باشد. نتایج بررسی پاسخ‌ها به قسمت ج سؤال ۶ در جدول ۲۲ ارائه شده است.

جدول ۲۲: نتایج سوال ۶ قسمت C بر اساس APOS به درصد

Table 22: Result of question 6 part C based on APOS and percentage

Draw $f(x)$ and compare of it	Find range $f(x)$ and $g(x)$ compare of it	Find domain $f(x)$ and $g(x)$ compare of it	Part
Function	Function	Function	Concept
Object	Object	Object	Intelligibility major
37.36	30.76	34.06	3rd of Math
9.09	7.69	20.27	3rd of Science
20.08	16.6	25.64	Total

در قسمت د از دانش‌آموزان خواسته شده است که نتیجه مقایسه‌ها را بیان کنند. هدف این قسمت از سؤال این است که دانش‌آموز دریابد که یک تابع می‌تواند با بازنمایی‌های متفاوتی ظاهر شود ولی این تفاوت بازنمایی فقط در همان ظاهر تابع می‌باشد. در سایر موارد دو تابع تفاوتی با هم ندارند. نتیجه‌گیری صحیح در این قسمت که وابسته به پاسخ صحیح به قسمت قبل است دانش‌آموز را در سطح طرحواره تابع و حد قرار می‌دهد. نتایج بررسی پاسخ‌ها به قسمت د سؤال ۶ در جدول ۲۳ ارائه شده است.

جدول ۲۳: نتایج سوال ۶ قسمت D بر اساس APOS به درصد

Table 23: Result of question 6 part D based on APOS and percentage

Those who answered question6 correctly	Those who answered part D correctly	Type of people answer
Limit and function	Limit and function	Concept
Schema	Object	Intelligibility major
13.18	41.75	3rd of Math
2.79	15.38	3rd of Science
6.83	25.64	Total

پاسخ به سؤالات تحقیق

پرسش اول: درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه از مفهوم حد در مبنای چارچوب APOS چگونه است؟

در تجزیه و تحلیل نتایج این تحقیق مشخص شد که اکثر دانش‌آموزان حد را در سطح عمل یا فرایند درک کرده و تعداد کمی از آن‌ها قادر به تشکیل شیء حد هستند. این نتایج به‌صورت کلی در جدول ۲۴ ارائه شده است.

جدول ۲۴: تجزیه و تحلیل نتایج سوالات بر مبنای APOS

Table 24: Decomposition of the results of the questions based on APOS

Schema	Level process updatable to level Schema	Object	Level process updatable to level object	Process	Level action updatable to level process	Action		
-	-	-	-	59.82	-	85	B	1
-	30.34	35.04	-	-	-	-	C	
-	-	-	50.42	59.82	9.40	-	B	2
-	-	-	-	-	67.09	80	A	3
-	-	-	61.11	69.23	-	-	B	
16.6	-	59.82	-	-	-	-	D	
-	-	-	-	-	-	78.20	B	4
-	-	32.05	-	-	-	-	C	
-	-	-	20.21	62.39	-	-	B	5
-	-	-	-	45	-	-	A	6
6.83	-	25.64	-	-	-	-	D	
11.71	30.34	38.13	37.91	59.25	38.24	80.06		Mean

نتایج در جدول نشان می‌دهد که اکثر افراد شرکت کننده در این تحقیق ۸۰/۰۶، مفهوم حد را در قالب عمل درک کرده و توانسته‌اند در پاسخ به سؤالاتی که برای حل آن‌ها دسترسی به روش روتین داشته‌اند، عملکرد خوبی داشته باشند. اما بازتاب روی عمل‌ها که باعث درونی شدن عمل شده و آن را به فرایند تبدیل می‌سازد از این درصد، در فقط ۵۹/۲۵ درصد اتفاق افتاده است که این اتفاق به علت توانایی این دسته از افراد در دست کاری توابع دو ضابطه‌ای و محاسبهٔ حدهای چپ و راست است. افرادی که در همان سطح عمل مانده و نتوانسته‌اند به سطح فرایند ارتقاء پیدا کنند، افرادی هستند که هنوز تصور می‌کنند می‌توانند مقدار حد را با جایگزینی عدد در تابع به دست آورند و هرگاه به توابع دیگری برخورد می‌کنند که نمی‌توانند از این روش استفاده کنند، از پاسخ دادن به آن سؤال ناتوان می‌شوند.

تشکیل شیء مفهوم حد در افرادی اتفاق می‌افتد که توانایی انعطاف‌پذیری بین بازنمایی‌های مختلف مفهوم حد را داشته و در محاسبهٔ حدهای مبهم توانا باشد. گرچه محاسبهٔ برخی از حدهای مبهم نیز دارای روش‌های قالبی بوده ولی حل بسیاری از این حدها نیازمند درک شیء از مفهوم حد است که در نمونهٔ ما شیء انگاری در ۳۸/۱۳ درصد افراد رخ داده است. عدم توانایی در بررسی‌های گرافیکی از مفهوم حد باعث شده تشکیل شیء در ذهن برخی دانش‌آموزان رخ نداده و درک درصدی از این افراد در همان سطح فرایند باقی بماند.

اما سازمان‌دهی عمل‌ها و فرایندها و اشیاء ذهنی که منجر به تشکیل طرحواره‌ها می‌گردند (در اینجا تشکیل طرحواره حد جهت درک پیوستگی مد نظر است)، در ۱۱/۷۱ درصد از افرادی که به سطح شیء رسیده‌اند اتفاق افتاده است. درک مفهوم حد در سطح طرحواره مستلزم بسیاری از توانایی‌ها در زمینه بازنمایی‌های مختلف از حد و بررسی علل وجود حد و پیوستگی و غیره می‌باشد که در اقلیت دانش‌آموزان شرکت‌کننده در تحقیق رخ داده است.

پرسش دوم: آیا بین درک دو گروه شرکت‌کننده سوم ریاضی و تجربی از مفهوم حد، تفاوت معناداری وجود دارد؟

در این آزمون دو گروه مستقل شرکت‌کننده (سوم ریاضی و سوم تجربی) وجود داشتند که برخی صفت‌های این دو گروه را با هم مقایسه شد. آزمون مورد استفاده برای این مقایسه آزمون t است.

در این قسمت آزمون می‌کنیم که آیا بر اساس داده‌های به‌دست‌آمده از دو نمونه مستقل می‌توان گفت که میانگین‌های دو جامعه با هم برابر است یا خیر؟ در این آزمون برای تمام سؤالات فرض مورد آزمون به‌صورت زیر است که μ_1 نشان‌دهندهٔ میانگین گروه سوم ریاضی و μ_2 نشان‌دهندهٔ میانگین گروه سوم تجربی است.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad (۱)$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

در تفسیر این جدول نیز می‌توان گفت با توجه به مقدار t که بیشتر از $t_{(0.05,232)} = 1.96$ و سطح معناداری، برای این تمامی سؤالات فرضیه صفر رد شده و فرضیه برابر نبودن میانگین دو کلاس تأیید می‌گردد. یعنی عملکرد دو گروه شرکت‌کننده در پاسخ به پرسش‌های آزمون یکسان نیست و بین میانگین هر دو کلاس تفاوت معناداری مشاهده می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف این مطالعه بررسی درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته تجربی و ریاضی از مفهوم حد بر اساس نظریه APOS بود. نتایج این تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان مفهوم حد را به خوبی درک نکرده و مشکلات فراوانی در درک این مفهوم دارند. عملکرد ضعیف دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات آزمون مخصوصاً گروه سوم تجربی این نکته را به خوبی مشخص می‌کند که ساخت و سازهای مفهوم حد در ذهن اکثر آن‌ها بسیار ناقص است.

جدول ۲۵: آزمون نمونه‌های مستقل برای همه سوالات
Table 25: Independent samples test for all questions

Levene's test for equality of variainces		T-test of equlity of mean confidence interval							
F	Sing	t	df	Sing(2-tailed)	Mean difference	Std, error difference	95% confidence interval of the difference		
							Lower	Upper	
11.022	0.001	5.438	232	0.000	3.23341	0.59460	2.06189	4.40492	Equal variances assumed
-	-	5.228	167.067	0.000	3.23341	0.61847	2.01238	4.45443	Equal variances not assumed

این دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات مفهومی حد نتوانستند نتایج خوبی را نمایان سازند ولی در پاسخ به سؤالات روتین و رویه‌ای که نیاز به درک مفهومی ندارد خوب عمل کرده‌اند. اکثر دانش‌آموزان در درک بازنمایی گرافیکی از حد مشکل دارند که این مشکل تأثیر فراوانی بر درک آن‌ها از مفهوم حد گذاشته است به طوری‌که هر جا از آن‌ها خواسته شده تابعی را رسم کنند و سپس حد تابع در نقطه را با شکل تابع مقایسه کنند، عملکرد ضعیفی داشته‌اند. به عبارت دیگر بر مبنای نظریه APOS سطح یادگیری دانش‌آموزان در یادگیری مفهوم حد عمل یا فرایند است و حد در قالب "شیء" در ذهن اکثر دانش‌آموزان تشکیل نشده است. در نهایت دانش‌آموزانی که قادر به تشکیل طرحواره‌های حد در ذهن خود گشته‌اند تعداد انگشت‌شماری از جامعه مورد مطالعه هستند.

مدل APOS مانند سایر مدل‌ها و نظریه‌های یادگیری ریاضی که در مورد نحوهٔ شکل‌گیری و درک یک مفهوم در ذهن یادگیرندگان وجود دارد، به نوعی قادر است ساخت و سازهای مفاهیم در ذهن را توصیف کند. این نظریه با فرض اینکه ساختن دانش ریاضی با ساختن اعمال و فرآیندها و اشیاء ذهنی و سازمان‌دهی آن‌ها در قالب طرحواره برای قابل‌درک بودن موقعیت‌ها و حل مسائل شکل می‌گیرد، هر فرد را قانع می‌سازد برای ساختن دانش جدید یک ساخت و ساز مناسب در سطح شیء داشته باشد و برای درک و درونی شدن مفهوم به‌صورت طرحواره فکر کند. مواجهه با مفهوم حد را می‌توان برای دانش‌آموزانی که به تازگی با مفهوم تابع آشنا شده است، تجربه‌ای جدید دانست. بنابراین کاملاً طبیعی است که یادگیرنده برای تفسیر کردن و معنا بخشیدن به این تجربه، بیش از هر چیز، از طرحواره موجود (که در اینجا طرحوارهٔ تابع است) کمک بگیرد یا به عبارت دیگر، مفهوم حد را در طرحوارهٔ تابع جذب کند. پس می‌توان یکی از علل عدم رشد و توسعهٔ مفهوم حد را در ذهن یادگیرندگان، ناقص بودن طرحوارهٔ تابع دانست. به عبارت دیگر درک اکثر دانش‌آموزان شرکت کننده در این تحقیق نسبت به مفهوم تابع هنوز به سطح شیء نرسیده است؛ پس کاملاً طبیعی است که طرحوارهٔ تابع آن‌ها که پیش نیاز درک مفهوم حد است، ناقص می‌باشد. یکی دیگر از علل توقف یادگیری به روش ارائه معلم برمی‌گردد، معلم باید بتواند در ذهن دانش‌آموزان بین اشیاء مفاهیم و فرایندهای ریاضی ارتباط برقرار کند، چون یک مفهوم یا حقیقت تازه هرگز خود به خود به وجود نمی‌آید، آن را باید به آگاهی‌ها و تجربه‌های روزانه دانش‌آموز مرتبط کرد [۲۲]. اگر این ارتباطات شکل نگیرد باعث عدم درک مفهوم و یادگیری طوطی‌وار خواهد شد.

معلم زمانی که به معرفی مفهوم حد می‌پردازد با استفاده از زبان عامیانه و دادن ایدهٔ اولیه، می‌تواند مانع ساخت طرحواره‌های درستی از مفهوم حد شود. چون نقش معلم در ساخت طرحی از مفهوم حد بسیار مهم است، اگر معلم با روشی نامناسب به آموزش بپردازد، ممکن است مانع جذب مفهوم حد توسط دانش‌آموز گردد. علت دیگر توقف رشد و توسعهٔ مفهوم، ارزشیابی‌های مستمر در محیط‌های آموزشی است که نیاز به درک مفهومی مفاهیم را مهم جلوه نداده و محدود به روش‌های روتین برای دستیابی به نتایج بهتر هستند. به همین دلیل پرداختن به تحقیقاتی در زمینهٔ تدریس و یادگیری هر مفهومی در ریاضی مانند مفهوم حد، می‌تواند منجر به ارائه راهکارهایی برای تدریس مؤثرتر شود.

مشارکت نویسندگان

تمام نویسندگان به نسبت سهم برابر در این پژوهش مشارکت داشتند.

تشکر و قدردانی

از تمام کسانی که ما را در انجام این پژوهش یاری رساندند تشکر و قدردانی داریم.

تعارض و منافع

«هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.»

منابع و مآخذ

[1] Cornu B. Limits. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166*)*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers; 1991.

[2] Weyer S. APOS Theory as a Conceptualization for Understanding Mathematical Learning. Summation*: Mathematics and Computer Science Scholarship at Ripon*. 2010; 3: 9-15.

[3] Abdi H, Fadai M, Goya Z. The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical farmeworks. *Roshd Mathematics Education Journal*. 2007; 88: 4-15. Persian.

[4] Asadnejad S, Bashir A, Safabakhsh A. Introduction to APOS Theory. *Proc. of 13th Iranian Mathematical Education Conference(P.٤٨)* . Tehran, Iran; 2014.

[5] Asiala M, Brown A, DeVries D, Dubinsky E, Mathews D, Thomas L. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *CBMS Issues in Mathematics Education*. 1997; 6: 1-32.

[6] Tall D. Reflection on APOS theory in Elementary and advanced mathematical Thinking. Published in O.Zaslavasky (ED), *Proceedings of the 23th conference of PME. 1*, 111-118; 1999.

[7] Chaman Ara S. Developing mathematical Understanding. *Roshd Mathematics Education Journal*. 2003; 73: 4-14. Persian.

[8] Dubinsky E, McDonald MA. *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*. In Derek Holton et al. (Eds.), *the teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273-280). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers; 2001.

[9] Dubinsky E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers; 1991.

[16] Mohtasham Z. Conceptual models of cncept image-concept definition & importance in education mathematical. *Roshd Mmathematics Education Journal.* 2014; 115: *21-29*. Persian.

[17] Garcia-martinez I., Parraguez M. The basis in the construction of the principle of the mathematical induction based on APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior.* 2017; 46: 128-143.

[18] Brown A, DeVries D., Dubinsky E, Thoma, K. Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior.* 1997; 16(3): 187-239.

[19] Maharaj A. An Apos analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras*. 2010; 71: 41-52.

[20] Maharaj A. An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education*. 2013; 33(1): 1-19.

[21] Maharaj A. An APOS analysis of natural science Students' understanding of integration. REDIMAT. *South African Journal of Education.* 2014; 3(1): 54-73.

[22] Polya G. *Mathematical discovery*. New York: Wiley; 1981.

[10] Sharifi Z. Introduction to APOS Theory & Application in Mathematics Education. *Proc. of Vth National Conference on Education.* Tehran, Iran; 2015.

[11] Nazari K. *The effect of visualization-based teaching approach on understanding the concept of limit and the spatial ability amongst high school student*. (master's thesis). SRTTU, Tehran; 2011.

[12] Davis G, Tall D,, Thomas M. What is the object of the encapsulation of process? *Proc. of MERGA* (pp.132-139). New Zealand: Rotarua; 1997.

[13] Eslami Mosalam B. *Learning difficulties in undergraduate mathematics.* (master's thesis). Sharif University Technology, Tehran; 2008.

[14] Tall DO, Inner, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics.* 1981; 12: 151-169.

[15] Arnon I, Cottrill J, Dubinsky E, Oktaç A, Roa Fuentes S, Trigueros M,& Weller K. *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in the mathematics education*. New York: Springer-Verlag.; 2014.

Citation: (Vancoure): Samadpour Shahrak M, Tahbaz M. [Reviewing the solutions of improving open spaces in primarygirls'schools from students'perspective (Case study: Tabriz city)]. *Tech. Edu. J. 2018; 12(2): 95-108*

http://dx.doi.org/10.22061/jte.2018.2921.1740

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to SRTTU Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.