

جدول ۱۱ راهبردهایی که دانش آموزان برای هریک از سؤالات به کار برده‌اند

سؤالات راهبردها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
حدس و آزمایش	-	-	-	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	✓	-
شمارش	-	-	-	-	✓	✓	✓	-	✓	-	✓	✓
جایگزینی	-	-	-	-	-	-	-	-	-	✓	-	-
تناسب	✓	-	-	-	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓
موضوع کلی	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	✓	-
تفاضل عددی	-	-	✓	-	✓	-	-	-	✓	-	✓	-
بازگشتی	-	-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
تنظیم روش	-	-	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	-	✓	✓
خطی	-	-	-	-	-	✓	✓	-	-	-	✓	-
زمینه ای	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-	✓	✓
مجموع راهبردهای مورد استفاده	۲	۱	۴	۲	۶	۷	۸	۲	۵	۳	۹	۵

ارائه تعمیم، موفق باشند. این موضوع با یافته‌های لنین [۱۵] و انگلیش و وارن [۲۰] سازگار است. این یافته تأکید می‌کند که دانش‌آموزان در کلاس درس تشویق شوند که در مورد راه حل خود با دیگر دانش‌آموزان و معلم کلاس گفتگو کنند و اعمال خود را ضمن حل مسأله توضیح دهند.

سؤال دوم تحقیق: دانش‌آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری از چه راهبردهایی استفاده می‌کنند؟

راهبردهایی که دانش‌آموزان در این تحقیق مورد استفاده قرار دادند، همراه با راهبردهای مورد استفاده برای هر سؤال در جدول ۱۱ ارائه شده است. آنان برای پاسخگویی به قسمت‌های مختلف هر سؤال، به ندرت از رسم شکل استفاده کردند و بیشتر متمایل به استفاده از راهبردهای عددی بودند. با این حال دانش‌آموزانی که در تعمیم موفق بودند هنگامی که با یک شکل یا الگوی شکلی مواجه می‌شدند، به کمک تجسم و هر یک با روش خود به حل مسأله می‌پرداختند. شواهد تجربی محکم نشان می‌دهند که بین مهارت‌های ادراکی تجسمی و توانایی ریاضی^{۱۳} و بین درک تجسمی و دستیابی ریاضی و بین بازنمایی تجسمی (یعنی

استفاده از تصاویر یا نمودارها) و موفقیت در حل مسأله ریاضی روابط معناداری وجود دارند [۲۱]. برخی از دانش‌آموزان برای پاسخگویی به بعضی سؤالات، بیش از یک راهبرد به کار بردند. به طور مثال دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات آزمون، در یک مسأله از راهبردهای رسم شکل و بازگشتی، راهبردهای حدس و آزمایش و بازگشتی، راهبرد-های بازگشتی و تنظیم روش، راهبردهای بازگشتی و تناسب و راهبردهای بازگشتی و زمینه ای استفاده کردند. این دانش‌آموزان توانایی به کارگیری همزمان چند راهبرد را برای رسیدن به تعمیم دارند که می‌تواند نمایانگر تفکر انعطاف‌پذیر آنان باشد. دانش‌آموزان در ده مسأله از دوازده سؤال داده شده، از راهبرد بازگشتی برای پاسخگویی به سؤالات استفاده کردند.

تمامی راهبردهای ذکر شده (به جز یک راهبرد) به صورت درست یا نادرست مورد استفاده قرار گرفته است. طرح مسأله هایی این چنین در کلاس درس و بررسی راه حل ها می تواند بازده آموزشی مناسبی به همراه داشته باشد. این تحقیق نشان داد که با وجود غفلت از تجسم و تفکر تجسمی در برنامه درسی ریاضی و کتاب های درسی ریاضی مدرسه ای، بخش زیادی از دانش آموزان از این توانایی بهره گرفته اند و راه حل هایی بدیع برای تعمیم ارائه کرده اند. به طور مثال در سؤال ۳ دیدن و بیان اشتراکات مبتنی بر تجسم و به روش های متفاوت منجر به نوشتن قانون با نمایش های مختلف هم ارز مانند: $2n+(n+1)$ و $3n+1$ و $n+(n+n+1)$ و $n+(n+n+1)$ و $n+(n+n+1)$ و $n+(n+n+1)$ (۱) شده است. این نکته نمایانگر این است که این گونه سؤالات دانش آموزان را بیشتر به فرایند تعمیم و توجیه ترغیب می کند. فهم تعمیم، بیان و بازنمایی آن به صورت یک عبارت جبری، باید به صورت هماهنگ مورد توجه قرار گیرند. بسیاری از دانش آموزان با توجه به دانش و تفکر حسابی، به پاسخ مراحل اولیه سؤال پرداخته و سپس با توجه به آن پاسخ ها و گذر از حساب به جبر، موفق به نوشتن قانون شدند. پس می توان با مطرح کردن مسائل تعمیم در کلاس های درس، فرصتی فراهم کرد که انتقال تفکر حسابی به جبری صورت گیرد. موضوع مهم دیگر لزوم برقراری توازن بین دانش مفهومی و دانش رویه ای در برنامه درسی ریاضی است. تعمیم در مجموع از جایگاه مناسبی برخوردار نیست. با آن که انتظار می رفت دانش آموزان در مرحل تفکر جبری باشند ولی نتایج تحقیق نشان داد که آنان هنوز از تفکر حسابی گذر نکرده اند.

پی نوشت

^۱Arithmetic with Letters

^۲National Council of Teachers of Mathematics

^۳Quasi-Generalization

^۴Generational, Transformational, and Global/meta-level

^۵Rule

^۶Guess and Check

^۷Trends In International Mathematics and Science Study

به نظر می رسد این راهبرد ارزش مطالعه بیشتری را داشته باشد. همچنین برای حل مسأله یازده، ۹ راهبرد مختلف به کار گرفته شد. اگرچه برخی از این راهبردها به صورت نادرست مورد استفاده قرار گرفت، با این حال بررسی آن ها در کلاس های درس، دانش آموزان را برای استفاده درست از راهبردها یاری خواهد کرد.

۴- نتیجه گیری

این تحقیق نشان داد که دانش آموزان در تعمیم هایی به صورت $y=ax$ ، عملکرد بهتری از تعمیم های خطی به فرم $y=ax+b$ دارند. این امر می تواند ناشی از آشنایی مناسب با مفهوم تناسب باشد که در دوره های ابتدایی و راهنمایی به قدر کافی آموزش داده می شوند. از طرف دیگر در مورد تعمیم هایی به شکل $y=ax+b$ مواد آموزشی مناسب و کافی نبوده اند. با آنکه الگو های شکلی و شبه تعمیم ها، می توانند درک قوی از ساختارها و مفاهیم ریاضی همچون متغیر در دانش آموزان ابتدایی و راهنمایی ایجاد کنند، کتاب های درسی کشورمان چندان به آن ها نمی پردازند. در برنامه درسی بسیاری از کشورها سه تایی «الگوها، روابط و توابع» از دوره مقدماتی تا سال های آخر متوسطه جایگاهی مناسب و ثابت دارد. پژوهش حاضر نشان داد که لازم است در معرفی مفهوم متغیر، تجدید نظر و بازنگری صورت گیرد. بخشی از این بازنگری به استفاده از الگوها در سطوح مختلف تحصیلی باز می گردد. دانش آموزان در مراحل اول و دوم تعمیم (دیدن، بیان کردن) دارای توفیق نسبی بودند؛ ولی در مرحله سوم (نوشتن تعمیم) دچار مشکل بودند. در حقیقت دانش آموزان از طریق توجه به مشترکات حالات خاص موضوعات به فهم و درک تعمیم نایل می شدند و قادر به بیان آن به صورت کلامی بودند؛ ولی در بیان تعمیم به صورت نمادین موفق نبودند. این موضوع نشانگر آن است که در کلاس های درس استاندارد، بازنمایی به قدر کافی مورد توجه قرار نگرفته است. اگر چه بسیاری از دانش آموزان در تعمیم دادن عملکرد چندان مناسبی نداشتند؛ اما تنوع راهبردهای به کار گرفته شده از سوی دانش آموزان موفق این ایده را حمایت می نماید که می توان آن ها را در کلاس آموزش داد. برای یکی از مسائل

- [۱۱] Radford L., *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*, Proceedings of the ۲۸th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Vol.۱, ۲۰۰۶, pp.۲-۲۱.
- [۱۲] Fujii T., *Probing students understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand?*, Proceedings of the ۲۰۰۳ Joint Meeting of PME and PMENA, Vol.۱, ۲۰۰۳, pp.۴۹-۶۵.
- [۱۳] Becker J.R. and Rivera F., *Generalization strategies of beginning high school algebra students*, in: Chick H. and Vincent J.L., (Eds.), Proceedings of the ۲۹th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.۴, ۲۰۰۵, pp.۱۲۱-۱۲۸.
- [۱۴] Kieran C., *Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching*, in: Cai J., Knuth E., (Eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ۲۰۱۱.
- [۱۵] Lanin J.K., *Generalization and Justification the challenge of introducing Algebraic reasoning through patterning activities*, Mathematical Thinking and learning, Vol.۷, ۲۰۰۵, pp.۲۳۱-۲۵۸.
- [۱۶] Radford L., *Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization*, Mathematical Thinking and Learning, Vol.۵, No.۱, ۲۰۰۳, pp.۳۷-۷۰.
- [۱۷] Zazkis R., Liljedahl P., and Chernoff E., *The Role of Examples in Forming and Refuting Generalizations*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol.۴۰, No.۱, ۲۰۰۸, pp.۱۳۱-۱۴۱.
- [۱۸] Rivera F.D., *Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization*, Mathematics Teacher, Vol.۱۰۱, No.۱, ۲۰۰۷, pp.۶۹-۷۵.
- ^۱Texas Assessment of Knowledge and Skill
- ^۲quasi variable
- ^۳بخش یک شامل سؤال ۱، بخش دو شامل سؤالات ۲،۴ و ۸، بخش سه شامل سؤالات ۵،۶ و ۱۰ و ۱۱، بخش چهار شامل سؤالات ۳،۷،۹ و ۱۲ است.
- ^{۱۱}Conceptual knowledge and Procedural Knowledge
- ^{۱۲}Rate-Adjust
- ^{۱۳}Visual Perceptual Skills and Mathematical Ability
- ### مراجع
- [۱] Mason J., *Early Algebraization*, in Cai J. and Knuth E., (Eds.), Advances in Mathematics Education, Netherlands: Springer, Vol.۲, ۲۰۱۱.
- [۲] Usiskin Z., *Doing algebra in grades K-۴*, Teaching children Mathematics, Vol.۳, ۱۹۹۷, pp.۳۴۶-۳۵۶.
- [۳] Kleiner I., *A History of Abstract Algebra*, Birkhauser Boston, ۲۰۰۷.
- [۴] Kieran C., *the Core of Algebra: Reflections on its Main Activities*, in Stacey K. Chick H. Kenda M., (Eds.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra, The ۱۳th ICMI Study, Vol.۸, ۲۰۰۴.
- [۵] National Council of Teachers of Mathematics, *Principals and standards for school mathematics*, Reston, ۲۰۰۰.
- [۶] Cooper J.T. and Warren E., *The effect of different representations on Years ۳ to ۵ student's ability to generalization*, ZDM mathematics Education, Vol.۴۰, ۲۰۰۸, pp.۲۳-۲۷.
- [۷] Polya G., *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, in: Aram A., (Ed.), Tehran, Keyhan, ۲۰۰۱.
- [۸] Amit M. and Neria D., *Rising to the challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students*, ZDM, Vol.۴۰, No.۱, ۲۰۰۸, pp.۱۱۱-۱۲۹.
- [۹] Mason J., *Expressing Generality and Roots of Algebra*, in: Bednarz N., Kieran C. and Lee L., (Eds.), Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching, Kluwer, Dordrecht, ۱۹۹۶, pp.۶۵-۸۶.
- [۱۰] Kaput J.J., *Teaching and learning a new algebra*, in: Fennema E. and Romberg T., (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers, ۱۹۹۹, pp.۱۳۳-۱۵۵.

- [۱۹] Rivera F. and Becker J., *Formation of Pattern Generalization Among Middle School Students: Results From a Three-Year Study*, in: Cai J. and Knuth E., (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*, Netherlands, Springer, Vol.۲, ۲۰۱۱.
- [۲۰] English L.D., and Warren E.A., *Introducing the variable through pattern exploration*, in: Gholam Azad S., (Ed.), *Roshd mathematics Education Journal*, Vol.۵۴, ۱۹۹۹, pp.۵۴-۶۰.