Tech. Edu. J. 19(4): 1003-1018, Autumn 2025

Technology of Education Journal
(TEJ)
Homepage: jte.sru.ac.ir

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Electronic dynamic assessment of students' awareness of mathematical proof functions

F. Kolahdouz*, N. Hashemi, H. Kashefi

Department of Mathematics Education, Farhangian University, P. O. Box 14665-889, Tehran, Iran

Received: 07 April 2025
Reviewed: 24 May 2025
Revised: 22 July 2025
Accepted: 14 September 2025

KEYWORDS:
Functions of Mathematical Proof
Dynamic Assessment
Electronic Assessment
Mathematics Students

*Corresponding author
F. Kolahdouz @cfu.ac.ir
(+98913) 9217609

ABSTRACT

Background and Objectives: Proof in mathematics is not merely a tool for verifying the truth of propositions, but also serves as a conceptual means for explanation, organization, discovery, and deepening mathematical understanding. However, research indicates that many university students fail to grasp the purpose of proofs effectively and tend to experience them as purely formal and abstract procedures. One contributing factor to this superficial understanding is the lack of appropriate instructional and assessment tools that clarify the diverse functions of proof. In this regard, dynamic assessment—particularly in electronic environments—can offer an effective strategy to enhance students' understanding of the multiple purposes of proof, as it combines evaluation with learning through targeted feedback. The present study aims to investigate the impact of electronic dynamic assessment on students' awareness of various purposes of mathematical proof. It specifically seeks to determine whether an interactive dynamic assessment model can foster a purposeful understanding of proof, especially regarding underappreciated objectives such as organization, application, and the discovery of new concepts.

Methods: This study is a mixed-methods research with a quantitative-qualitative approach, in which the quantitative part used a quasi-experimental research method with a single-group pre-test and post-test design. The statistical population consisted of 110 second-semester mathematics students in 2023 at one of the country's public universities, of whom 35 students participated in this study using a convenience sampling method. Data were collected through two researcher-developed questionnaires administered before and after the intervention to measure students' understanding of the purposes of proof, as well as an electronic dynamic assessment test. The test was developed using C++ and included five multiple-choice items accompanied by targeted, instructional feedback. The reliability of the questionnaires was confirmed using Cronbach's alpha ($\alpha = 0.7$), and their validity was reviewed by expert faculty members. Quantitative data were analyzed using McNemar's test to assess the significance of changes in students' awareness of proof purposes. In addition, semi-structured interviews were conducted with 10 students to complete qualitative data analysis.

Findings: Statistical analysis revealed significant differences between students' responses in the pre- and post-intervention questionnaires for seven out of eight proof purposes ($p < 0.05$). The most notable improvement was observed in the "organization" purpose, with the number of students recognizing it rising from 15 in the pretest to 31 in the posttest. Other purposes, such as 'explanation and clarification,' 'discovery of new results,' 'application in other contexts,' and 'problem solving,' also showed significant gains. The only purpose that did not exhibit a statistically significant change was 'verification of truth,' which was already well understood before the intervention. Interview analysis confirmed that electronic dynamic assessment helped students recognize conceptual relationships, internal structures of proofs, and better understand the educational aims of proof. Students reported that the test questions and feedback provided a novel and insightful experience in understanding proofs.

Conclusion: The present study demonstrated that electronic dynamic assessment can serve as an effective tool for enhancing students' awareness of the diverse functions of mathematical proof. Beyond mere evaluation, this type of assessment facilitates deeper learning of proof concepts and structures through instructional and interactive feedback. The findings align with previous research in mathematics education and highlight the pivotal role of assessments grounded in Vygotsky's Zone of Proximal Development theory. It is

recommended that mathematics educators incorporate interactive and feedback-driven models in the design of instructional and assessment activities to foster conceptual and purposeful understanding of proof among students. Such an approach not only helps students perceive proofs as tools for explanation, organization, discovery, and problem-solving, but also lays the foundation for developing mathematical reasoning and cultivating critical thinking. In doing so, students' understanding of the nature and purpose of proof is transformed from a rule-based and repetitive view to a dynamic, analytical, and deeply applicable perspective.

COPYRIGHTS
© 2025 The Author(s). This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)
(https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

NUMBER OF REFERENCES	NUMBER OF FIGURES	NUMBER OF TABLES
47	0	9

مقاله پژوهشی

آگاهی دانشجویان از اهداف اثبات ریاضی با کمک ارزیابی پویای الکترونیکی

فهیمه کلاهدوز**، نوروز هاشمی، حمیدرضا کاشفی

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران

چکیده

پیشینه و اهداف: اثبات در ریاضیات، تنها ابزاری برای تأیید درستی گزاره‌ها نیست؛ بلکه ابزاری مفهومی برای تبیین، سازمان‌دهی، کشف و ارتقای درک ریاضی نیز به شمار می‌رود. با وجود این، پژوهش‌ها نشان می‌دهند که بسیاری از دانشجویان در کلاس‌های درس دانشگاهی اثبات‌ها را به‌درستی و هدفمند درک نمی‌کنند و بیشتر، آن‌ها را به‌عنوان فرایندهای صوری و انتزاعی تجربه می‌کنند. یکی از دلایل این درک سطحی، فقدان ابزارهای آموزشی و ارزیابی مناسب برای روشن‌سازی اهداف متنوع اثبات است. در این راستا، ارزیابی پویا، به‌ویژه در محیط‌های الکترونیکی می‌تواند راهکاری مؤثر برای افزایش درک دانشجویان از اهداف گوناگون اثبات باشد؛ چراکه هم‌زمان با سنجش، فرایند یادگیری را از طریق بازخوردهای آموزشی تقویت می‌کند. هدف پژوهش حاضر، بررسی تأثیر ارزیابی پویای الکترونیکی بر آگاهی دانشجویان از اهداف مختلف اثبات‌های ریاضی است. این پژوهش می‌کوشد مشخص کند که آیا طراحی و اجرای الگوی تعاملی از ارزیابی پویا می‌تواند درک هدفمندی از اثبات، به‌ویژه اهداف کمتر موردتوجه مانند سازمان‌دهی، کاربرد و کشف مفاهیم جدید را برای دانشجویان فراهم سازد.

روش‌ها: این پژوهش مطالعه‌ای ترکیبی با رویکرد کمی-کیفی است که در بخش کمی آن، از روش پژوهش نیمه‌آزمایشی با طرح پیش‌آزمون و پس‌آزمون تک‌گروهی استفاده شده است. جامعهٔ آماری شامل دانشجویان ترم دوم رشتهٔ ریاضی در سال ۱۴۰۲ در یکی از دانشگاه‌های دولتی کشور به‌تعداد ۱۱۰ نفر بود که از میان آن‌ها، ۳۵ دانشجو به‌روش نمونه‌گیری در دسترس در این مطالعه شرکت کردند. ابزار گردآوری داده‌ها شامل دو پرسش‌نامهٔ محقق‌ساخته برای سنجش درک اهداف اثبات، قبل و بعد از مداخله و آزمون ارزیابی پویای الکترونیکی بود که با کمک زبان برنامه‌نویسی C++ طراحی شده و شامل ۵ سؤال چندگزینه‌ای به‌همراه بازخوردهای هدفمند و آموزشی بود. پایایی پرسش‌نامهٔ آگاهی از اهداف اثبات با استفاده از آلفای کرونباخ (۰,۷) تأیید شد و روایی ابزارها نیز با نظر اساتید خبره بررسی شد. تحلیل کمّی داده‌ها با آزمون مک‌نمار برای بررسی معناداری تغییر در آگاهی دانشجویان نسبت به اهداف اثبات انجام شد. همچنین مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته با ۱۰ نفر از دانشجویان برای تکمیل تحلیل کیفی صورت گرفت.

تاریخ دریافت: ۱۸ فروردین ۱۴۰۴
تاریخ داوری: ۰۳ خرداد ۱۴۰۴
تاریخ اصلاح: ۳۱ تیر ۱۴۰۴
تاریخ پذیرش: ۲۳ شهریور ۱۴۰۴

واژگان کلیدی:
اهداف اثبات ریاضی
ارزیابی پویا
ارزیابی الکترونیکی
دانشجویان ریاضی

* نویسنده مسئول
F. Kolahdouz @cfu.ac.ir
۰۹۱۳-۹۲۱۷۶۰۹

یافته‌ها: نتایج تحلیل آماری نشان داد که تفاوت بین پاسخ‌های دانشجویان در پرسش‌نامه‌های پیش و پس از اجرای ارزیابی، در هفت مورد از هشت هدف اثبات معنادار بود (p <۰/۰۵). بیشترین رشد معنادار مربوط به هدف «سازمان‌دهی» بود که از ۱۵ نفر در پیش‌آزمون به ۳۱ نفر در پس‌آزمون افزایش یافت. همچنین اهدافی نظیر «توضیح و شفاف‌سازی»، «کشف نتایج جدید»، «کاربرد در موقعیت‌های دیگر» و «حل مسئله» نیز پس از مداخله به‌طور معناداری درک شدند. تنها هدفی که تغییر معناداری نداشت، «تأیید درستی گزاره» بود که از پیش نیز درک شده بود. تحلیل مصاحبه‌ها نیز تأیید کرد که ارزیابی پویای الکترونیکی به دانشجویان در شناسایی روابط مفهومی، ساختارهای درونی اثبات و درک بهتر اهداف آموزشی اثبات کمک کرده است. دانشجویان بیان کردند که سؤالات آزمون و بازخوردها، تجربه‌ای تازه و متفاوت از درک اثبات برای آن‌ها فراهم کرده است.

نتیجه‌گیری: پژوهش حاضر نشان داد که ارزیابی پویای الکترونیکی می‌تواند ابزار مؤثری برای افزایش آگاهی دانشجویان از اهداف متنوع اثبات در ریاضیات باشد. این نوع ارزیابی فراتر از سنجش صرف، موجب یادگیری عمیق‌تر مفاهیم و ساختار اثبات از طریق بازخوردهای آموزشی و تعاملی می‌شود. یافته‌ها با پژوهش‌های پیشین در حوزهٔ آموزش اثبات هم‌راستا هستند و بر نقش کلیدی ارزیابی‌های مبتنی بر نظریهٔ ناحیهٔ مجاور رشد ویگوتسکی تأکید دارند. به آموزشگران ریاضی توصیه می‌شود در طراحی فعالیت‌های آموزشی و ارزشیابی، از مدل‌های تعاملی و بازخوردمحور بهره گیرند تا زمینهٔ درک مفهومی و هدفمند اثبات برای دانشجویان فراهم شود. این اقدام نه‌تنها به دانشجویان کمک می‌کند تا اثبات‌ها را به‌عنوان ابزاری برای تبیین، سازمان‌دهی، کشف و حل مسئله درک کنند، بلکه زمینه را برای توسعهٔ استدلال ریاضی و پرورش تفکر انتقادی در آن‌ها فراهم می‌آورد. بدین ترتیب، فهم آنان از ماهیت و اهداف اثبات را از حتی صرفاً براساس قواعد و تکرار، به رویکردی پویا، تحلیلی و عمیقاً کاربردی متحول می‌سازد.

مقدّمه

بسیاری از محققان معتقدند که هدف اثبات در جامعهٔ ریاضی و همچنین در کلاس‌های درس ریاضی، صرفاً متقاعدکردن دانشجویان از درستی و تأیید یک ادعا نیست؛ بلکه فرایند اثبات باید نوعی بینش ریاضی برای دانشجویان فراهم آورد [۱، ۲، ۳، ۴، ۵]. اینکه بینش ریاضی دقیقاً به چه معنایی است و همچنین چگونه درک و بینش دانشجویان از یک اثبات بررسی می‌شود، موضوعی است توسط محققان در حال بررسی است. برخی از محققان معتقدند که باید بین اثبات‌هایی که فقط درستی گزارهٔ مورد نظر را تأیید می‌کنند و اثبات‌هایی که علاوه بر تأیید، به خوبی علت درستی گزاره را توضیح می‌دهند، تمایز قائل شد [۳، ۴، ۵، ۶، ۷]. این نوع اثبات‌ها که در کنار تأیید گزاره، جنبهٔ توضیحی نیز دارند، در آموزش ریاضی هم‌اهمیت و ارزش بیشتری دارند. همان‌گونه که می‌دانیم، هدف اصلی اثبات در آموزش ریاضیات، رشد و پرورش درک و فهم یادگیرندگان است. لذا استفاده از اثبات با هدف توضیح‌دادن درستی گزاره، امری مهم و ضروری است. باتوجه‌به اینکه در برخی از زمینه‌ها دیدگاه ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی از آنچه یک اثبات را می‌سازد، متفاوت است، درک و شناخت آن‌ها نیز از نقش اثبات در ریاضیات متفاوت باشد[۵، ۷، ۸]. بسیاری از کارکردها و اهداف اثبات، از جمله تأیید، توضیح، گفتمان، کشف و چالش ذهنی نیز به اثبات در آموزش ریاضی نسبت داده می‌شود. اما گاهی اوقات شکاف بزرگی بین نقش اثبات و ظهور آن‌ها در تکالیف و فعالیت‌های ریاضی یادگیرندگان وجود دارد [۷، ۹]. در بسیاری از کلاس‌های ریاضی در دانشگاه، زمان زیادی به ارائهٔ اثبات قضایا اختصاص داده می‌شود و بیشتر محتوای کتاب‌های ریاضیِ پیشرفته، شامل اثبات‌هاست و مسلماً دانشجویان، بسیاری از مفاهیم، تکنیک‌ها و روابط ریاضی را از طریق خواندن اثبات‌ها یاد می‌گیرند [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵]؛ اما به‌نظر می‌رسد که اغلب دانشجویان، اثبات‌ها را به طور هدفمند و مؤثر نمی‌خوانند و گاهی بدون توجه به نکات و پیام‌های آموزشیِ این متون و بدون درک اهمیت و هدف اثباتِ موردنظر، از آن استفاده می‌کنند [۱۰، ۱۳].

یکی از انتظارات اساتید و آموزشگران ریاضی آن است که دانشجویان سعی کنند که اثبات قضایای ارائه شده در کتاب‌های درسی خود را بفهمند و ایده‌های موجود در فرآیند اثبات مورد نظر را درک کنند و همچنین ایده‌ها و روش‌های به کار رفته در فرآیند اثبات را یاد بگیرند[۱۲، ۱۶]. همچنین انتظار می‌رود که دانشجویان با مطالعهٔ اثبات قضایای ریاضی با اهداف و کارکردهای اثبات آشنا شوند. با این وجود، اینکه به چه اندازه این هدف آموزشی محقق می‌شود، تا اندازه‌ای ناشناخته است و به نظر می‌رسد که این ناشناخته بودن تا حدودی به دلیل عدم ابزارهای ارزیابی مناسب در ارتباط با درک اثبات است. ارزیابی با استفاده از ابزاری مناسب در ارتباط با درک دانشجویان از فرآیند اثبات ریاضی می‌تواند برای آموزش و تدریس مؤثر توسط آموزشگران ریاضی مفید باشد. به عبارت دیگر همزمان با بررسی توانایی دانشجویان پیرامون فرآیند اثبات و آگاهی از نیاز جدّی به ارتقاء این توانایی‌ها به ویژه درک اثبات‌های ریاضی، نیاز به روش‌های مطلوب ارزیابی نیز احساس می‌شود [۱۷، ۱۸، ۱۹]. تحقیقات نشان می‌دهند که ارزیابی می‌تواند به‌عنوان ابزاری برای ارتقاء کیفیت آموزش ریاضی مورد استفاده قرار گیرد، به گونه‌ای که بهبود و توسعه ارزیابی موجب بهبود آموزش شود [۱۷، ۲۰، ۲۱، ۲۲]. یکی از انواع ارزیابی که می‌تواند به منظور توسعهٔ مداخلات آموزشی و کمک به آموزش یادگیرندگان همراه با ارزیابی‌های معمول مورد استفاده قرار گیرد، ارزیابی پویاست [۲۰، ۲۳، ۲۴، ۲۵]. ارزیابی پویا از اوایل دهه ۱۹۹۰ مورد توجه بسیاری از صاحب نظران و محققان بوده است [۲۰]. با گسترش آموزش الکترونیکی، سیستم‌های ارزیابی پویا نیز در محیط یادگیری الکترونیکی قابل طراحی است؛ به گونه‌ای

که وظیفهٔ ارزیابی یادگیرندگان را بر عهده گرفته و نقاط قوت و ضعف یادگیری آن‌ها را مشخص می‌سازند و در صورت لزوم به آن‌ها بازخورد مناسب ارائه می‌دهند؛ البته برنامهٔ مناسب و محتوای مرتبط با این نوع از ارزیابی، باید اهداف مورد نظر برای بررسی درک و فهم یادگیرندگان را تأمین نماید [۲۱، ۲۲].

در پژوهش‌های مرتبط با طراحی و تأثیر ارزیابی الکترونیکی بر آموزش و یادگیری یادگیرندگان در رشته‌های مختلف، در اغلب موارد، تأثیرات این سیستم ارزیابی در مقاطع قبل از دانشگاه مورد بررسی قرار گرفته است [۲۱، ۲۲، ۲۶، ۲۷]؛ اما به نظر می‌رسد که با توجه به نفوذ گستردهٔ ICT (Information and Communication Technology) در دانشگاه، این نوع ارزیابی می‌تواند در بهبود آموزش و یادگیری دانشجویان نیز مؤثر باشد. با توجه به مطالب فوق، پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر یک الگوی طراحی‌شده از ارزیابی پویای الکترونیکی بر میزان آگاهی دانشجویان از اهداف و کارکردهای اثبات در ریاضیات شکل گرفت. این مطالعه در تلاش بود با طراحی ارزیابی پویای الکترونیکی، تأثیر این نوع ارزیابی را بر یادگیری دانشجویان از اهداف و کارکردهای اثبات قضایای ریاضی بررسی کند و به این سؤال اصلی پاسخ دهد که آیا ارزیابی پویای الکترونیکی می‌تواند موجب افزایش درک دانشجویان از اهداف مختلف اثبات، به‌ویژه اهدافی چون سازمان‌دهی مفاهیم، کشف نتایج جدید و کاربرد در موقعیت‌های دیگر شود. در ادامه، توضیحات لازم پیرامون اهداف و کارکردهای اثبات، ارزیابی پویا و ارزیابی پویای الکترونیکی که جزو مفاهیم و ابزار کلیدی اجرای پژوهش حاضر هستند، ارائه می‌شود.

اهداف و کارکردهای اثبات

در تحقیقات حوزهٔ آموزش ریاضی، اثبات نه‌تنها به‌عنوان ابزاری برای تأیید درستی گزاره‌ها، بلکه به‌مثابه فعالیت‌شناختی، استدلالی و اجتماعی مورد توجه قرار گرفته است. پژوهشگران متعددی اهداف و کارکردهای مختلفی را برای اثبات برشمرده‌اند که شناخت آن‌ها می‌تواند در طراحی محتوا و شیوه‌های آموزش نقش مهمی ایفا کند [۱۵، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱].

یکی از شناخته‌شده‌ترین کارکردهای اثبات، تأیید درستی گزاره‌ها از طریق استدلال صوری و مبتنی بر منطق ریاضی است [۱، ۲]. این نگاه که اغلب در قالب اثبات‌های دقیق و صوری نمود دارد، ممکن است دیدگاه محدودی از اثبات ایجاد کند و موجب شود فراگیران صرفاً بر «درست‌بودن» نتایج تمرکز کنند و از فرایند تولید ایده و فرض غافل شوند [۹، ۳۰]. در مقابل، کارکرد توضیح و شفاف‌سازی به بُعدشناختی اثبات توجه دارد؛ جایی که اثبات نه‌فقط برای نشان‌دادن درستی، بلکه برای فهم چرایی گزاره‌ها به کار می‌رود [۲، ۶، ۱۵، ۳۱]. چنین اثبات‌هایی اغلب بینش عمیق‌تری دربارهٔ موضوع فراهم می‌کنند و از منظر آموزشی بسیار ارزشمندند[۱]. کارکرد مهم دیگر، سازمان‌دهی دانش ریاضی از طریق ساختاردهی و اتصال مفاهیم در یک نظام منطقی است که امکان بازبینی روابط، تعاریف و نتایج را فراهم می‌آورد [۱، ۸، ۳۱]. همچنین، کشف و ابداع نتایج جدید یکی از نقش‌های خلاقانهٔ اثبات است که از مسیر آزمون فرضیه‌ها، جست‌وجوی مثال‌های نقض و تولید تعمیم‌ها شکل می‌گیرد[۱، ۱۸].

علاوه بر این، اثبات می‌تواند بستری برای گفتمان ریاضی باشد؛ به‌معنای تعامل، بحث، اقناع و توجیه ایده‌ها در جامعهٔ یادگیری [۶، ۲۸، ۲۹]. از این زاویه، زبان اثبات وسیله‌ای برای ارتباط علمی محسوب می‌شود [۲۸]. همچنین برخی پژوهشگران به رابطهٔ نزدیک میان اثبات و حل مسئله اشاره کرده‌اند؛ یعنی همان‌طور که در حل یک مسئله از تحلیل، ترکیب دانش و استدلال استفاده می‌شود، فرایند اثبات نیز نیازمند چنین فرایندی است [۸، ۳۲]. دیگر اهداف اثبات، از جمله تعمیم مفاهیم [۳۱، ۳۴]، کاوشگری و پژوهش مفهومی [۳۳]، چالش ذهنی و لذت استدلال[۲۸]، ایجاد استقلال فکری [۲۹]، انتقال روش‌ها به حوزه‌های دیگر [۶، ۱۵، ۳۱] و اصلاح یا رد حدس‌ها [۳۳] نیز در متون علمی گزارش شده‌اند. این تنوع در کارکردها، نشان‌دهنده‌ی نقش چندوجهی اثبات در آموزش ریاضی است و می‌تواند در سیاست‌گذاری و تدوین برنامه‌های درسی نقشی راهبردی ایفا کند. اشاره به این نکته ضروری است که شاید بتوان کارکردهای دیگری نیز برای اثبات در نظر گرفت. برای مثال در برخی از تحقیقات به کارکرد زیبایی در فرایند اثبات نیز اشاره شده [۲۸ و ۳۱] که البته توضیحی پیرامون آن بیان نشده است؛ ولی می‌توان گفت که برخی از رویکردهای اثبات، از جمله سازمان‌دهی، کشف نتایج جدید و ایجاد چالش ذهنی می‌توانند بیانگر جنبهٔ زیبایی اثبات نیز باشند. البته باید اشاره کنیم احتمال این‌که همهٔ این اهداف بتوانند در کنار هم در نظر گرفته شوند، کم است. برای مثال، آموزشگری که فهم شبه‌تجربی از اثبات دارد، ممکن است تأکیدش بر ضرورت کشف، ارتباطات و توضیح از اهداف اثبات باشد [۴]. هرکدام از این اهداف در شرایط مناسب و با رویکرد آموزشی مخصوص به خود می‌توانند ظاهر شوند [۴، ۳۱].

ارزیابی پویای الکترونیکی

- ارزیابی پویا

ارزیابی پویا، نوعی ارزیابی تعاملی است که در آن، آموزش مداخله‌ای به‌صورت برنامه‌ریزی‌شده انجام می‌شود و سپس تأثیر این آموزش بر عملکرد بعدی یادگیرندگان مورد ارزیابی قرار می‌گیرد[۲۳، ۲۴، ۲۵]. همچنین این ارزیابی روی فرایند یادگیری تأکید دارد تا محصول آن [۲۳]. براساس از یافته‌های به‌دست‌آمده از تحقیقات، این نتیجه حاصل می‌شود که ارزیابی پویا دو ویژگی عمده دارد. اول اینکه می‌تواند برای افراد، فرصت یادگیری را فراهم کند و دیگر اینکه ارزیابی پویا شامل آموزش و بازخورد می‌باشد[۳۵]. بازخورد معناداری که یادگیرندگان در طی ارزیابی پویا دریافت می‌کنند، در صورتی که «به‌موقع»، «پیوسته و مستمر» باشد، می‌تواند به آن‌ها در خودارزیابی، بهبود انگیزه و اعتماد به‌نفس آن‌ها نیز کمک کند [۲۲، ۲۵، ۲۷، ۳۵] با استفاده از بازخورد

معنادار، یادگیرندگان می‌توانند ضعف خود را در یادگیری، بهبود بخشند و ارزش بازنگری را در فرصت‌های خاص، دریابند [۲۱، ۲۲]. در ارزیابی قلم-کاغذی به دلیل آنکه آموزشگران در یک زمان، باید یادگیرندگان بسیاری را مدنظر قرار دهند؛ لذا ارائهٔ بازخورد معنادار در طی اجرا و مدیریت ارزیابی مشکل است [۲۱]؛ بنابراین اغلب دانش‌آموزان یا دانشجویان، در آزمون‌های طول ترم، چیزی بیشتر از یک نمره یا درجه دریافت نمی‌کنند و این نمره‌ها فراگیران را تشویق نمی‌کند که به‌طور عمیق‌تر، درگیر یادگیریشان شوند [۲۱، ۲۲، ۲۵]. به طور کلی ارزیابی پویا ارزیابی را به مداخله متصل می‌کند؛ با این هدف که حرکت یادگیرندگان را به‌سمت سطح بالاتری از عملکرد تسهیل بخشد [۲۴، ۲۵، ۲۶]. نظریه ویگوتسکی (Vygotsky) پیرامون «ناحیهٔ تقریبی رشد» (Zone of Proximal Development) زیربنای نظری ارزیابی پویا را تشکیل می‌دهد. اساس این نظریه، این تصور است که سطح بالای تفکر با «واسطه» از طریق تعامل با دیگران و مصنوعات فیزیکی و نمادین (برای مثال، کتاب‌ها، کامپیوترها، اشکال، زبان و امثال این) عمل می‌کند [۲۴].

آموزشگران به‌هنگام مشاهدهٔ ارزیابی پویا می‌توانند اطلاعات مفیدتری برای کمک به تدریس خود کسب کنند[۲۵، ۳۶]. در چندین پژوهش، اطلاعات حاصل از آزمون‌های ایستا و ارزیابی پویا در اختیار آموزشگران قرار داده شده است و سپس از آن‌ها خواسته شده بگویند از هرکدام چه مقدار آموخته و هرکدام به چه میزان مفید واقع شده است. میزان تفاوت، معمولاً و به‌طور مثبت به‌نفع ارزیابی پویا بوده است [۲۵، ۳۶، ۳۷]. هنگامی‌که آموزشگران به‌طور واقعی هر دو موقعیت را مشاهده می‌کنند و صرفاً به خواندن گزارش براساس راهبردهای ارزیابی اکتفا نمی‌کنند، این میزان تفاوت حتی بسیار چشمگیرتر است. البته لازم به ذکر است که ارزیابی پویا نه یک ابزار ارزیابی است نه یک روش برای ارزیابی، بلکه چارچوبی است برای مفهوم‌سازی آموزش و ارزیابی به‌عنوان فعالیتی برای درک توانایی‌های یادگیرندگان از طریق حمایت فعالانهٔ رشد آن‌ها [۲۵]. بر اساس توضیحاتی که ارائه شد، می‌توان گفت که یکی از اهداف اصلی ارزیابی پویا بهبود و اصلاح عملکرد یادگیرندگان از طریق ارائهٔ واسطه‌های کمکی در فرایند ارزیابی است [۲۱] . در ارزیابی پویا، ارزیابی و آموزش، فعالیت واحدی هستند که به‌طور هم‌زمان، رشد یادگیرنده را از طریق وساطت، تشخیص و توسعه می‌دهند [۲۳].

- ارزیابی پویای الکترونیکی

در سال‌های اخیر، با گسترش فناوری اطلاعات و ارتباطات (Information and Communication Technology= ICT)، نظام‌های آموزشی، به‌ویژه در حوزهٔ آموزش ریاضی دستخوش تغییرات چشمگیری شده‌اند. یکی از مهم‌ترین این تحولات، توسعهٔ ابزارهای ارزیابی دیجیتال و از جمله آن‌ها، «ارزیابی پویای الکترونیکی» بوده است [۲۱، ۲۲، ۲۷]. این نوع ارزیابی، برخلاف آزمون‌های سنتی که صرفاً نقش اندازه‌گیری دارند، ماهیتی مداخله‌گر و آموزشی دارد. به‌عبارت دیگر، در ارزیابی پویا، آزمونگر با ارائهٔ سرنخ‌ها، بازخوردهای فوری و راهنمایی‌های مرحله‌به‌مرحله، به یادگیرنده در طول فرایند حل مسئله کمک می‌کند [۲۰، ۲۳].

محیط‌های دیجیتال به‌واسطهٔ ویژگی‌های تعاملی خود این امکان را فراهم می‌کنند که خطاهای یادگیرنده به‌صورت آنی تشخیص داده و مداخلاتی متناسب با نوع خطا ارائه شود [۲۴]. این فرایند نه‌تنها به بهبود عملکرد فوری یادگیرنده کمک می‌کند، بلکه فرصت‌هایی برای تأمل، بازبینی و یادگیری عمیق‌تر فراهم می‌آورد [۲۰، ۲۲]. در واقع، در محیط‌های مبتنی برICT ، می‌توان به مهارت‌ها و فرایندهایی دست یافت که در ارزیابی‌های سنتی قلم‌کاغذی امکان سنجش آن‌ها وجود ندارد. برای نمونه، توانایی آزمون در پیگیری روند تفکر یادگیرنده یا واکنش آنی به پاسخ‌ها می‌تواند در فهم عمیق‌تر فرایندهای شناختی مؤثر باشد [۳۷، ۳۸، ۳۹].

چندین مطالعه به نقش فناوری در ارتقای یادگیری ریاضی و ارزیابی مفاهیم پیچیده، از جمله استدلال، اثبات و حل مسئله پرداخته‌اند [۳۷، ۳۸]. مدل ارزیابی پویای کامپیوتری، نوعی رویکرد آموزشی- سنجشی است که به‌صورت گام‌به‌گام، از طریق ارائهٔ پرسش‌ها و هدایت‌هایی ازپیش‌تعیین‌شده، به فراگیران کمک می‌کند تا ضمن درگیری با مسئله، خطاهای خود را اصلاح کنند و درک بهتری از مفاهیم به‌دست آورند [۲۰، ۲۳].

بااین‌حال، مرور پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد که بهره‌گیری از ارزیابی پویای الکترونیکی در حوزهٔ خاصی همچون آموزش اثبات ریاضی، هنوز به‌صورت هدفمند بررسی نشده است. اثبات‌های ریاضی به‌عنوان یکی از مؤلفه‌های اساسی در آموزش ریاضی، نیازمند درک عمیق، استدلال مرحله‌به‌مرحله و شناخت اهداف و کارکردهای آن‌ها هستند. در این راستا، بهره‌گیری از ارزیابی پویای الکترونیکی می‌تواند نه‌تنها به آشکارسازی تفکر فراگیران در فرایند نوشتن اثبات، بلکه به شکل‌گیری فهمی روشن‌تر و هدفمندتر از نقش اثبات در ریاضی کمک کند.

بر این اساس، پژوهش حاضر با هدف پرکردن خلأ موجود، به بررسی تأثیر ارزیابی پویای الکترونیکی بر ارتقای آگاهی دانشجویان ریاضی از اهداف و کارکردهای اثبات می‌پردازد و تلاش دارد ظرفیت‌های این نوع ارزیابی را در بستری مفهومی و عملیاتی برای یادگیری اثبات تحلیل کند.

روش تحقیق

مطالعهٔ حاضر، پژوهشی ترکیبی است که با چند هدف طراحی و اجرا شد. یکی از اهداف اصلی آن، بررسی تأثیر ارزیابی پویای الکترونیکی بر درک دانشجویان از اهداف اثبات قضیهٔ ریاضی، پیش و پس از اجرای ارزیابی بود. همچنین بخشی از داده‌های کیفی به‌دست‌آمده از پاسخ‌های تشریحی و مصاحبه‌های تکمیلی نیز در تحلیل نتایج مدنظر قرار گرفتند. در بخش کمی، باتوجه‌به اینکه پس از آن داده‌های کیفی مورد تحلیل قرار می‌گرفت، از نیمه‌آزمایشی با طرح پیش‌آزمون و پس‌آزمون

تک‌گروهی استفاده شد. جامعهٔ آماری این پژوهش را کلیهٔ دانشجویان ترم دوم رشتهٔ ریاضی در یکی از دانشگاه‌های دولتی شرق کشور در سال ۱۴۰۲ تشکیل می‌دادند که تعداد آن‌ها ۱۱۰ نفر بود. دلیل انتخاب دانشجویان سال اول و دوم آن بود که براساس یافته‌های برخی مطالعات پیشین [۴۱، ۴۲] انتظار می‌رود دانشجویان این مقطع با مبانی اثبات‌های ریاضی آشنا باشند و بتوانند به‌صورت منطقی به اثبات‌ورزی بپردازند و از اهداف و کارکرد اثبات‌های ریاضی آگاهی داشته باشند. با توجه به اهداف پژوهش و محدودیت‌های زمانی، مالی و امکانات موجود و امکان حضور دانشجویان در مطالعه، با استفاده از روش نمونه‌گیری در دسترس، ۳۵ نفر از دانشجویان در این مطالعه شرکت کردند.

ابزار گردآوری داده‌ها شامل یک پرسش‌نامهٔ محقق‌ساخته بود که در دو نوبت، پیش از اجرای ارزیابی پویای الکترونیکی و پس از آن در اختیار دانشجویان قرار گرفت. در این پرسش‌نامه، از دانشجویان خواسته می‌شد اهداف اثبات قضیه‌ی ریاضی مشخصی را بیان کنند. در واقع هدف پرسش‌نامه این بود که بررسی شود درک دانشجویان بعد از طی‌کردن مراحل آموزش مدرسه‌ای و یک ترم تحصیلی در دانشگاه، نسبت به اهداف اثبات چگونه است. اهداف و کاربردهای اثبات ارائه‌شده در این پرسش‌نامه مانند تأیید درستی یک گزاره، توضیح و شفاف‌سازی، سازمان‌دهی، کشف یا ابداع نتایج جدید، شناسایی تعاریف، اثبات به‌عنوان حل مسئله، کاربرد در موقعیت‌های دیگر ریاضی و ایجاد استقلال فکری براساس مطالعات مختلف طراحی شد [۱، ۲، ۶، ۱۵، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱]. برای سنجش اعتبار و کیفیت ابزار گردآوری داده‌های کمّی، از روایی محتوا استفاده شد.

بدین منظور، محتوای پرسش‌نامه و ارزیابی طراحی‌شده، پیش از اجرا، توسط سه تن از اعضای هیئت‌علمی رشتهٔ ریاضی با دقت و چند نوبت بررسی شد تا از پوشش اهداف مفهومی مطالعه اطمینان حاصل شود. در طراحی سؤال‌ها تلاش شد محتوای آن‌ها هم‌زمان اعتبار علمی و قابل‌فهم برای دانشجویان سال اول باشد. از میان قضایای متعدد مطرح‌شده در درس ریاضی‌عمومی، قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ مقدار میانگین کوشی (Generalized Mean Value Theorem) به‌عنوان بستر ارزیابی انتخاب شد؛ زیرا این قضیه مفاهیم بنیادی مانند حد، پیوستگی و مشتق را در بر دارد که برای سنجش درک مفهومی دانشجویان از اثبات مناسب تشخیص داده شده است. این قضیه مفاهیم بنیادی مانند حد، پیوستگی و مشتق را در بر دارد که برای سنجش درک مفهومی دانشجویان از اثبات مناسب تشخیص داده شده است. این قضیه مفاهیم بنیادی مانند حد، پیوستگی و مشتق را در بر دارد که برای سنجش درک مفهومی دانشجویان از اثبات مناسب تشخیص داده شده است. این قضیه مفاهیم بنیادی مانند حد، پیوستگی و مشتق را در بر دارد که برای سنجش درک مفهومی دانشجویان از اثبات مناسب تشخیص داده شده است. این قضیه مفاهیم بنیادی مانند حد، پیوستگی و مشتق را در بر دارد که برای سنجش درک مفهومی دانشجویان از اثبات مناسب تشخیص داده شده است. این قضیه مفاهیم بنیادی مانند حد، پیوستگی و مشتق را در بر دارد که برای سنجش درک مفهومی دانشجویان از اثبات مناسب تشخیص داده شده است که برای سنجش در پس از بررسی قضیهٔ «تعمیم‌یافتهٔ مقدار میانگین کوشش» و بررسی کتاب‌های ریاضیات عمومی و حساب دیفرانسیل و انتگرال [۴۳، ۴۴، ۴۵] و نتایج و یافته‌های مطالعات دیگر در ارتباط با درک دانشجویان از اثبات ریاضی [۱۲، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۹، ۴۱، ۴۲، ۴۶] پرسش‌های ارزیابی قلم–کاغذی با اهداف مختلفی طراحی شد که تأکید آن‌ها بر روابط درونی، یعنی روابط بین فرایند اثبات موردنظر و قضایای دیگر بود. ایده‌ی اصلی طراحی سؤالات، با توجه به آزمونی که روی، آلکاک و انگِلس (Roy, Alcock, & Inglis) در مطالعهٔ خود استفاده کردند [۴۱] و همچنین مدل درک اثبات مژیا راموس و همکاران (Mejia-Ramos et. al.) [۱۹] بود؛ زیرا برخی از اهداف مطالعهٔ این محققان منطبق با بخشی از اهداف مطالعهٔ حاضر است.

در فرایند ارزیابی پویای الکترونیکی، ابتدا اثباتی مختصر از این قضیه به دانشجویان ارائه شد (جدول ۱) و سپس طی چند سؤال سنجشی، درک آن‌ها از اهداف اثبات بررسی شد. داده‌های به‌دست‌آمده از پرسش‌نامه‌ها پیش و پس از مداخله، به‌منظور بررسی تفاوت معنادار در درک مفهومی دانشجویان، با استفاده از آزمون مک‌نمار تحلیل آماری شدند. همچنین بخشی از داده‌های کیفی به‌دست‌آمده از پاسخ‌های تشریحی و مصاحبه‌های تکمیلی نیز در تحلیل نتایج مدنظر قرار گرفتند.

دانشجویان بعد از مطالعهٔ اثبات مختصر قضیه، وارد صفحات شامل سؤالات ارزیابی می‌شدند (جدول ۲).

سؤالات به صورت چند گزینه‌ای بود و تأکید آن‌ها در هنگام طراحی بر روابط درونی یعنی روابط بین گزاره‌ها در قضیه و روابط بین گزاره‌ها در فرآیند اثبات قضیهٔ مورد نظر و همچنین روابط بیرونی یعنی روابط بین فرآیند اثبات مورد نظر و قضایای دیگر نیز بود. نمونه‌ای از سؤال در جدول ۳ ارائه می‌گردد.

این سؤال در ارزیابی پویای الکترونیکی به صورت ۴ گزینه‌ای ارائه گردید که ۴ گزینه‌ی طراحی شده به صورت زیر بودند (جدول ۴):

با انتخاب هر گزینه، دانشجو با یک پیام مواجه می‌شد که جنبهٔ آموزشی و ردیابی داشت. در واقع اگر دانشجو گزینهٔ نادرست را انتخاب کند، ابتدا دلیل نادرستی آن گزینهٔ بیان‌شده (پیام آموزشی) و سپس دربارهٔ گزینهٔ صحیح و جزئیات آن، سؤالات چندگزینه‌ای دیگر برای بررسی عمیق‌تر درک دانشجویان از حل مسئله و انتخاب گزینه مورد نظر، مطرح می‌شود (پیام ردیابی) که مجدداً با انتخاب هر گزینه دانشجو یک پیام (بازخورد) آموزشی یا ردیابی دریافت می‌کند. با انتخاب هر گزینه در پاسخ به سؤال مورد نظر، دانشجو مسیری را طی می‌کند که شامل دو پیام آموزشی و دو پیام ردیابی است.

پاسخ دانشجویان و مسیری که با انتخاب هر گزینه در ارزیابی پویای الکترونیکی طی کردند، کدگذاری گردید که در جدول ۵، ارائه می‌شود.

جدول ۱: قضیهٔ تعمیم یافته مقدار میانگین کوشی همراه با اثبات آن به اختصار

Table 1: The Generalized Cauchy Mean Value Theorem and Its Proof (Summarized)

قضیه‌ی A: اگر توابع f و g بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشند $(a,b \in R)$ و اگر به ازای هر x متعلق به بازه‌ی (a,b) داشته باشیم $g'(x) \neq 0$ آنگاه نقطه‌ای مانند k متعلق به بازه (a,b) هست به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(k)}{g'(k)}$$

Theorem A: If the functions f and g are continuous on the interval [a,b], and differentiable on the open interval (a,b), here a,b ∈ ℝ, and if for every x ∈ (a,b), g'(x) ≠ 0, then there exists a point k ∈ (a,b) such that:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(k)}{g'(k)}$$

اثبات قضیه به طور مختصر:

A brief proof of the theorem:

سطر ۱- با توجه به فرض قضیه و گزاره‌های مرتبط، درمی‌یابیم که باید $g(a) \neq g(b)$

Step 1- Based on the theorem's assumptions and related propositions, we conclude that g(a) ≠ g(b).

سطر۲- حال تعریف می‌کنیم $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$

Step 2- Define the function $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$

سطر ۳- مشاهده می‌کنیم که $h(a) = h(b)$.

Step 3- It can be observed that h(a) = h(b).

سطر ۴- پس $\exists k \in (a,b) \;\; s.t. \; h'(k) = 0$

Step 4-Therefore, ∃ k ∈ (a,b) such that h'(k) = 0.

سطر ۵- $h'(k) = 0 \rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(k)}{g\prime(k)}$

Step 5- $h'(k) = 0 \rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(k)}{g\prime(k)}$

سطر ۶- بنابراین: $\exists k \in (a,b) \;\; s.t. \;\; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(k)}{g\prime(k)}$.

Step 6- Thus, $\exists k \in (a,b) \;\; s.t. \; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(k)}{g\prime(k)}$

جدول ۲: سؤالات ارائه شده در آمون درک اثبات قضیهٔ GMVT بدون بازخوردها

Table 2: Questions Presented in the GMVT Proof Comprehension Test without Feedback

سوال۱) چگونه در سطر ۱ از اثباتِ قضیه‌ی A، نتیجه می‌گیریم که باید $g(a) \neq g(b)$ ؟

(با استفاده از فرضِ قضیه‌ی A و قضایا یا مفاهیم مرتبط، توضیح دهید.)

Question 1) How do we conclude in line 1 of the proof of Theorem A that g(a)≠g(b)?

(Explain using the assumptions of Theorem A and relevant theorems or concepts.)

سؤال۲) اگر قضیه‌ی A بدین‌گونه بیان شود که :

اگر توابع f و g بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشند و اگر به ازای هر x متعلق به بازه‌ی (a,b) ، $f'(x) \neq 0$، آنگاه :

الف) حکم قضیه‌ی A چگونه بیان می‌شود؟

ب) $h(x)$ را چگونه تعریف می‌کنیم؟

Question 2) Suppose Theorem A is stated as follows:

If the functions f and g are continuous on the interval [a,b] and differentiable on the interval (a,b), and if for every x∈(a,b) , f′(x)≠0, then:

a) How is the conclusion of Theorem A stated?

b) How do we define h(x)?

سؤال ۳) کدام یک از جفت توابعِ ارائه شده در قسمت **الف** و **ب** بر بازه داده شده، در قضیه A صدق می‌کنند؟ دلیل خود را بیان نمایید.

(توابع f و g را به ترتیبِ همان توابعِ بیان شده با شرایط مذکور در قضیه‌ی A در نظر بگیرید.)

Question 3) Which of the given pairs of functions in parts (a) and (b) satisfy the conditions of Theorem A on the given interval? Justify your answer. (Assume that the functions f and g refer, respectively, to the same functions mentioned under the stated conditions in Theorem A.)

الف) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x < 2 \end{cases}$ و $g(x) = x+1$ ؛ بر بازهٔ $[0,2]$

ب) $f(x) = (x+1)^2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ؛ بر بازهٔ $[0,2]$

سؤال ۴) در اثبات قضیه‌ی A چگونه در سطر ۴ ، نتیجه می‌گیریم که:

Question 4) In the proof of Theorem A, how do we conclude the following in line 4:

$$\exists k \in (a,b)\ s.t.\ h'(k) = 0$$

سؤال۵) اگر قضیه‌ی A بدین‌گونه بیان شود که:

اگر توابع f و g بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشند ، آنگاه نقطه‌ای مانند k متعلق به بازه (a,b) وجود دارد به طوری‌که: .....

فکر می‌کنید حکم قضیه چه خواهد بود و $h(x)$ را چگونه تعریف می‌کنیم؟

If the functions f and g are continuous on the interval [a,b] and differentiable on the interval (a,b), then there exists a point k∈(a,b) such that: .....

What do you think the conclusion of the theorem would be, and how would you define h(x)?

جدول ۳: سؤال ۳، همراه با بازخوردها در ارزیابی پویای الکترونیکی

Table 3: Question 3 with Feedback in the Electronic Dynamic Assessment

سؤال ۳) کدام یک از جفت توابعِ ارائه شده در قسمت الف و ب بر بازه داده شده، در قضیه A صدق می کنند؟

(توابع f و g را به ترتیب همان توابعِ بیان شده با شرایط مذکور در قضیه‌ی A در نظر بگیرید.)

Which of the function pairs presented in parts A and B satisfy Theorem A over the given interval?

(Assume that the functions f and g correspond to those defined under the conditions stated in Theorem A.)

الف) $f(x) = \begin{cases} x.....0 \le x < 1... \\ 2-x.....1 \le x < 2. \end{cases}$ و $g(x) = x + ۱$ ؛ بر بازه‌ی $[0,2]$

ب) $f(x) = (x+1)^2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ؛ بر بازه‌ی $[-2,0]$

جدول ۴: گزینه‌های سؤال ۳ در ارزیابی پویای الکترونیکی

Table 4: Options for Question 3 in the Electronic Dynamic Assessment

A) توابع الف و ب هر دو، در شرایط قضیه‌ی A صدق می‌کنند.

A) Both pairs of functions in parts A and B satisfy the conditions of Theorem A.

B) توابع ب در شرایط قضیه‌ی A صدق می‌کنند اما توابع الف در شریط قضیهAصدق نمی‌کنند.

B) The pair of functions in part B satisfies the conditions of Theorem A, but the pair in part A does not.

C) توابع الف در شرایط قضیه‌ی A صدق می‌کنند اما توابع ب در شریط قضیه A صدق نمی‌کنند.

C) The pair of functions in part A satisfies the conditions of Theorem A, but the pair in part B does not.

D) هیچ کدام از جفت توابع الف و ب در شرایط قضیه‌ی Aصدق نمی‌کنند.

D) Neither pair of functions in parts A nor B satisfies the conditions of Theorem A.

جدول ۵: پاسخ دانشجویان و مسیر طی شده با انتخاب هر گزینه در پاسخ به سؤال ۳ در ارزیابی پویای الکترونیکی

Table 5: Students' Responses and the Path Taken Based on Each Selected Option for Question 3 in the Electronic Dynamic Assessment

مسیری که دانشجویان در پاسخ به سؤالات ارزیابی پویا طی کرده‌اند. The paths followed by students in responding to the dynamic assessment questions	کد اختصاص یافته به هر پاسخ The code assigned to the corresponding answer
انتخاب گزینه درست در انتخاب اول و تمام مسیرها در ادامه درست یا انتخاب اول نادرست و انتخاب دوم درست و تمام مسیرها در ادامه، درست Correct option selected on the first attempt with all subsequent steps correct, or incorrect first choice followed by a correct second choice with all subsequent steps correct.	4
انتخاب گزینه درست در انتخاب اول و یک انتخاب نادرست در طی مسیر یا انتخاب اول نادرست و انتخاب دوم درست و یک انتخاب نادرست در طی مسیر یا انتخاب سوم درست و تمام مسیرها در ادامه، درست Correct option selected on the first attempt with one incorrect step along he path, or incorrect first choice followed by a correct second choice with one ncorrect step along the path, or correct third choice with all subsequent steps correct.	3
انتخاب گزینه درست در انتخاب اول و دو انتخاب نادرست در طی مسیر یا انتخاب دوم درست و دو انتخاب نادرست در طی مسیر یا با انتخاب سوم درست و یک انتخاب نادرست در طی مسیر Correct option selected on the first attempt with two incorrect choices along the path, or correct option selected on the second attempt with two incorrect choices along the path, or correct option selected on the third attempt with one incorrect choice along the path.	2
انتخاب چهارم درست یا بیشتر از دو انتخاب نادرست در طی مسیر Correct option selected on the fourth attempt or more than two incorrect choices made along the path.	1

برای نمونه، بخشی از بازخوردهای ارائه شده به دانشجویی که در پاسخ به سؤال ۳، پاسخ دانشجوی C را انتخاب می‌کند، در جدول ۶ ارائه شده است.

البته در ادامهٔ پیام‌های ارائه‌شده در جدول ۶، برای بررسی اینکه دانشجو توانایی اعمال شرایط قضیه را در حل مسئلهٔ ریاضی کسب کرده است، سؤال دیگری نیز به او ارائه می‌شود که در این قسمت ذکر نکرده‌ایم. اگر دانشجو گزینهٔ C را در پاسخ به سؤال ۶، انتخاب کند و در ادامهٔ مسیر، در پاسخ به سؤالات ردیابی، تمامی گزینه‌ها را به‌درستی انتخاب کند، کد شمارهٔ ۴ (یعنی مسیر کاملاً صحیح) به او اختصاص می‌یابد. همچنین با انتخاب بقیهٔ گزینه‌ها در پاسخ به سؤال ۶، دانشجویان بازخوردهایی را دریافت نمودند که به‌دلیل محدودیت صفحات مقاله ارائه نشده است.

همچنین در ادامهٔ طراحی سؤالات و بررسی دقیق آن‌ها، طراحی بازخوردها در ارزیابی نیز با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از مطالعات قبلی [۱۸، ۴۲] انجام پذیرفت. در طراحی بازخوردها تأکید بر آن بود که بازخوردها باید در زمان مناسب و با توجه به گزینهٔ انتخاب‌شده توسط دانشجویان طراحی شود و طبق اهداف مطالعهٔ حاضر باید بازخوردها به‌گونه‌ای باشند که براساس تعریف کارکردهای اثبات، دانشجو متوجه کارکردها و اهداف اثبات قضیه شود و به‌طورکلی بازخوردها جنبهٔ آموزشی داشته باشند. همچنین این نکته مورد توجه بود که طراحی ارزیابی در فضای الکترونیکی برای دانشجویان خسته‌کننده و یکنواخت نباشد که بعد از اجرای ارزیابی پویای الکترونیکی و مصاحبه با برخی از دانشجویان، پویایی و یکنواختی فضای ارزیابی الکترونیکی توسط آن‌ها تأیید گردید. پرسش‌نامه‌ها (پرسش‌نامهٔ ۱ و ۲) نیز برای تعیین آگاهی دانشجویان قبل و بعد از اجرای ارزیابی الکترونیکی طراحی شد و بعد از چند بار بازبینی توسط مؤلفان مقاله به تأیید نهایی رسید.

جدول ۶: بخشی از بازخوردهای ارائه شده به دانشجویی که در پاسخ به سؤال ۳، پاسخ C را انتخاب می‌کند.

Table 6: Sample Feedback Provided to a Student Who Selected Option C in Response to Question 3

پاسخ دانشجوی C پاسخ صحیحی نمی‌باشد. هر دو تابع در قسمت ب در شرایط قضیه‌ی A صدق می‌کنند زیرا شرایط قضیه برای هر دو تابع f و g برقرار است، اما تابع f در قسمت الف در شرایط قضیه A صدق نمی‌کند.

Student C's response is incorrect. Both functions in part B satisfy the conditions of Theorem A, as all the required assumptions for functions *f* and *g* are met. However, the function *f* in part A does not satisfy the conditions of Theorem A.

الف) $f(x)=\begin{cases} x \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \le x < 1 \ldots \\ 2-x \ldots\ldots 1 \le x < 2. \end{cases}$ و $g(x) = x + ۱$ ؛ بر بازه‌ی $[0,2]$

ب) $f(x) = (x+1)^2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ؛ بر بازه‌ی $[-2,0]$

به نظر شما تابع f کدام یک از شرایط قضیه A را ندارد؟

Which of the conditions of Theorem A is not satisfied by function f?

گزینه ۱) تابع f در یکی از نقاط دامنه، مشتق پذیر نیست .

Option 1) Function f is not differentiable at one point in the domain.

گزینه۲) مشتق تابع f در یکی از نقاط دامنه، برابر صفر می‌شود.

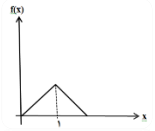
Option 2) The derivative of function f is equal to zero at one point in the domain.

(در بازخورد به گزینه ۱ در سطر بالا پیام زیر ظاهر میشود: یعنی اگر دانشجو گزینه ۱ را در سطر بالا انتخاب کند پیام زیر ظاهر می‌گردد):

(The following message appears as feedback for Option 1 in the line above: that is, if the student selects Option 1, this message will be displayed):

حق با شماست، تابع f در قسمت الف در شرایط قضیه A صدق نمی‌کند. اگر به شکل تابع f توجه کنیم، مشاهده می‌نماییم که تابع f در نقطه x= ۱ مشتق پذیر نیست.

You are correct. The function f in part A does not satisfy the conditions of Theorem A. By examining the graph of the function f, we observe that it is not differentiable at the point x=1.

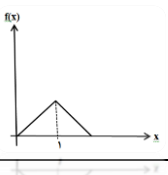


(در بازخورد به گزینه ۲ در سطر بالا پیام زیر ظاهر میشود: یعنی اگر دانشجو گزینه ۲ را در سطر بالا انتخاب کند پیام زیر ظاهر می‌گردد.)

(In response to selecting Option 2 above, the following feedback message will appear: that is, if the student selects Option 2 in the above line, the message below will be displayed.)

تابع f در قسمت **الف** در شرایط قضیه صدق نمی‌کند. اگر به شکل تابع f توجه کنیم، مشاهده می‌نماییم که تابع f در نقطه x= ۱ مشتق پذیر نیست .

Function f in part (a) does not satisfy the conditions of Theorem A. By examining the graph of function f, we observe that it is not differentiable at the point x=1.



پایایی پرسش‌نامه‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب در ارتباط با بررسی درک اولیهٔ دانشجویان از اهداف اثبات قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ مقدار میانگین کوشی قبل از اجرای ارزیابی پویای الکترونیکی و بررسی درک دانشجویان از اهداف اثبات قضیهٔ مورد نظر، بعد از اجرای ارزیابی پویای الکترنیکی، با استفاده از روش آلفای کرونباخ محاسبه شد. ضریب پایایی برای پرسش‌نامهٔ «آگاهی از اهداف اثبات»، هرکدام مقدار ۰/۷ به دست آمد که همبستگی تقریباً مناسب این پرسش‌نامه‌ها را نشان می‌دهد. در ارتباط با تأثیر ارزیابی پویا و ارائهٔ پیام‌ها و بازخوردها در ارزیابی پویای الکترونیکی بر عملکرد دانشجویان، ۱۰ نفر از آن‌ها برای مصاحبه‌ای نیمه‌ساختاریافته، انتخاب و دعوت شدند .

پرسش‌نامهٔ ۱ برای بررسی درک دانشجویان از اهداف اثبات طراحی شد که قبل از اجرای ارزیابی پویای الکترونیکی توسط مشارکت‌کنندگان تکمیل شد. هدف از طراحی پرسش‌نامهٔ ۱، آن بود که بررسی شود درک دانشجویان بعد از طی‌کردن مراحل آموزش مدرسه‌ای و یک ترم تحصیلی در دانشگاه، نسبت به اهداف اثبات چگونه است. در این پرسش‌نامه، با توجه به اهدافی که محققان در مطالعات مختلف به آن اشاره کرده‌اند[۱، ۱۵، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲،۳۴] جدولی تهیه شد.

در ستون اول جدول، برخی از اهدافی را که یک اثبات ریاضی می‌تواند داشته باشد، با توضیحی مختصر، به‌گونه‌ای که معنای هر هدف برای دانشجویان مشخص و شفاف باشد، ارائه شد و از دانشجویان خواسته شد که بعد از مطالعهٔ هر هدف، یکی از دو گزینهٔ ارائه‌شده در ستون مقابل به آن هدف را با علامت *، مشخص کنند. همچنین اهداف اثبات در پرسش‌نامهٔ ۱ به‌گونه‌ای انتخاب شدند که پاسخ دانشجویان به این پرسش‌نامه، قابل‌مقایسه با نتایج به‌دست‌آمده از پاسخ دانشجویان به پرسش‌نامهٔ ۲ باشد. برای مثال، یکی از سطرهای پرسش‌نامه در جدول ۷ ارائه شده است .

پس از اجرای پرسش‌نامه ۱ که در ابتدای کار در ارتباط با اهداف اثبات به دانشجویان ارائه شد، ارزیابی پویای الکترونیکی انجام شد. دانشجویان به‌طور هم‌زمان در آزمایشگاه کامپیوترِ دانشگاه محل نمونه‌گیری، آزمون را انجام دادند. این ارزیابی که به‌صورت الکترونیکی و آفلاین برگزار شد، شامل ۵ سؤال به‌صورت چندگزینه‌ای بود. هرگزینه به‌صورت هدفمند و براساس مشکلاتی که دانشجویان در درک فرایند اثبات دارند، طراحی گردید. درواقع طراحی این گزینه‌ها براساس نتایج یافته‌های تحقیقات قبلی صورت پذیرفت [۱، ۱۹، ۲۹، ۳۹، ۴۰، ۴۴]. به‌ویژه در مطالعه‌ای که فتح‌اللهی و همکاران [۴۲] انجام گرفت، آزمونی طراحی شد که اهداف برخی از سؤالات آن با اهداف سؤالات ارزیابی‌های این مطالعه شباهت داشت و لذا براساس پاسخی که دانشجویان به سؤالات آن آزمون ارائه داده بودند، برخی از گزینه‌های سؤالات نیز در ارزیابی الکترونیکی طراحی شد. این ارزیابی مبتنی بر بازخورد بود که ایدهٔ اصلی آن براساس مطالعات وانگ است [۲۱، ۲۲].

در واقع آزمون الکترونیکی به‌گونه‌ای طراحی شد که در هر سؤال با انتخاب هر گزینه، بازخوردی منطبق با هدف آن گزینه به دانشجو ارائه می‌شد. بازخوردها جنبهٔ تشخیصی (ردیابی) یا آموزشی یا تشویقی داشتند. ارزیابی الکترونیکی با کمک زبان C++ توسط یک مهندس فناوری اطلاعات براساس بازخوردهای طراحی‌شده توسط محققان طراحی شد. در واقع در طرح‌نظری بازخوردها مشخص شده بود که دانشجو با انتخاب هر گزینه با چه بازخوردی مواجه شود. (یک نمونه از سؤالات ارزیابی همراه با بازخوردها در پیوست ۳ ارائه می‌شود.)

بعد از اجرای ارزیابی پویای الکترونیکی نیز پرسش‌نامهٔ ۲ (پیوست ۳) توسط دانشجویان تکمیل شد. در پرسش‌نامهٔ ۲ بررسی شد که آیا دانشجویان در طی پاسخ به سؤالات ارزیابی به‌خاطر نوع و ماهیت سؤالات و بازخوردهای ارائه‌شده، به برخی از اهداف اثبات در قضیهٔ مدنظر پی برده‌اند. سپس مقایسه‌ای بین داده‌های به‌دست‌آمده از این پرسش‌نامه و پرسش‌نامه شماره ۱ که دانشجویان در ابتدا تکمیل کرده بودند، انجام شد و نتایج مورد تحلیل قرار گرفت. برای نمونه، یک نمونه از محتوای پرسش‌نامه‌ی۲ در جدول۸ ارائه می‌شود.

هدف از طراحی این پرسش‌نامه آن بود که درک دانشجویان از اهداف اثبات با توجه به فرایند اثبات قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ مقدار میانگین کوشی و نوع ارزیابی و محتوای آن بررسی شود و بین داده‌های به‌دست‌آمده در این قسمت از مطالعه و داده‌های حاصل از پرسش‌نامه‌ی ۱، مقایسه‌ای صورت گیرد و تغییرات بررسی شود.

جدول۷: نمونه‌ای از محتوای پرسش‌نامه ۱

Table 7: Sample Content of Questionnaire 1

اهداف و کاربردهای اثبات Purposes and uses of proof	تجربه‌ی شما در برخورد با فرایند اثبات Your experience dealing with the proof process
تأیید درستی یک گزاره: Verifying the truth of a statement: این هدف، به معنای نشان‌دادن درستی و صحت یک گزاره است که بر طبق مجموعه‌ای از قوانین منطقی و قضایای از قبل ثابت شده، حاصل می‌شود. This goal means demonstrating the truth and accuracy of a proposition that is achieved according to a set of logical rules and previously proven theorems.	◯ در برخی اثبات‌ها به این هدفِ اثبات پی برده‌ام. In some proofs I have realized this purpose of proof. ◯ تا کنون در فرایند اثبات‌ها با این هدفِ اثبات، مواجه نشده‌ام. So far, I have not encountered this goal of proof in the process of proofs.

جدول ۸: نمونه‌ای از اهداف اثبات قضیه‌ی تعمیم یافته مقدار میانگین کوشی در پرسش‌نامه ۲

Table 8: An Example of the Goals of Proving the Generalized Cauchy Mean Value Theorem in Questionnaire 2

هدف و کاربرد اثبات Purpose and application of proof	فرآیند اثبات قضیهA شامل این هدف می‌شود. The process of proving Theorem A involves this goal.	فرآیند اثبات قضیهA شامل این هدف نمی‌شود. The process of proving Theorem A does not involve this goal.
تأیید درستی یک گزاره: Verifying the truth of a statement: این هدف، به معنای نشان‌دادن درستی و صحت یک گزاره بر طبق مجموعه‌ای از قوانین منطقی و قضایای از قبل ثابت شده، می‌باشد. This goal means demonstrating the truth and accuracy of a proposition according to a set of logical rules and previously proven theorems.	○	○

یافته‌ها و بحث

همان‌گونه که بیان شد، در مطالعهٔ حاضر تلاش بر آن بود که با طراحی ارزیابی پویای الکترونیکی، تأثیر این نوع ارزیابی بر یادگیری دانشجویان از اهداف و کارکردهای اثبات قضایای ریاضی بررسی شود. در واقع محققان بر آن بودند به این سؤال اصلی پاسخ دهند که آیا ارزیابی پویای الکترونیکی می‌تواند افزایش درک دانشجویان از اهداف مختلف اثبات، به‌ویژه اهدافی چون سازمان‌دهی مفاهیم، کشف نتایج جدید و کاربرد در موقعیت‌های دیگر شود. لذا قبل از اجرای ارزیابی پویای الکترونیکی، پرسش‌نامه۱ به دانشجوبان ارائه گردید. همانگونه که بیان شد، هدف از ارائهٔ این پرسش‌نامه آن بود که بررسی شود آیا دانشجویان تاکنون در مواجهه با اثبات قضایای ریاضی در کتاب‌ها یا کلاس‌های درسی، برخی از اهداف اثبات را درک کرده‌اند و با آن مواجه شده‌اند یا خیر. همچنین دانشجویان پس از انجام ارزیابی پویای الکترونیکی، پرسش‌نامهٔ ۲ را تکمیل کردند تا تأثیر احتمالی این نوع ارزیابی بر درک و آگاهی دانشجویان از اهداف اثبات، مطالعه شود. به‌منظور بررسی تأثیر به‌کارگیری ارزیابی پویای الکترونیکی بر افزایش آگاهی دانشجویان از اهداف مختلف اثبات‌های ریاضی، داده‌های حاصل از دو پرسش‌نامهٔ پیش و پس از مداخله (پرسش‌نامهٔ ۱ و ۲)، از آزمون آماری مک‌نمار استفاده شد. در واقع با استفاده از این آزمون، برای هر هدف از اثبات، تعداد دانشجویانی که اظهار داشته‌اند آن هدف را درک کرده‌اند، در دو مرحلهٔ پیش‌آزمون و پس‌آزمون مقایسه شد. فراوانی پاسخ دانشجویان به پرسش‌نامه‌های ۱ و ۲ و نتایج تحلیل آزمون مک‌نمار برای مقایسهٔ پاسخ دانشجویان برای هر هدف اثبات، در جدول ۹ ارائه می‌شود.

جدول۹: فراوانی پاسخ دانشجویان به گزینه‌های موجود در دو پرسش‌نامه‌ی نگرش نسبت به اهداف اثبات

Table 9: Frequency of Students' Responses to the Options Available in the Two Questionnaires on Attitudes towards Proof Goals

هدف اثبات Objective of prove	پیش از مداخله Before intervention	پس از مداخله After intervention	p-value	تفاوت معنادار Significant difference
تأیید درستی یک گزاره Verifying the truth of a statement	28	28	1.0000	خیر ✗ No✗
توضیح و شفاف‌سازی Explaining and clarifying	23	31	0.0156	بلی ✓ Yes ✓
سازمان‌دهی Organizing	15	31	0.0000	بلی ✓ Yes ✓
کشف یا ابداع نتایج جدید Discovering or inventing new results	19	26	0.0156	بلی ✓ Yes ✓
شناسایی تعاریف Identifying definitions	22	30	0.0313	بلی ✓ Yes ✓
اثبات به‌عنوان حل مسئله Proving as problem solving	17	27	0.0078	بلی ✓ Yes ✓
کاربرد در موقعیت‌های دیگر ریاضی Application to other mathematical situations	18	27	0.0156	بلی ✓ Yes ✓
ایجاد استقلال فکری Building intellectual independence	20	28	0.0313	بلی ✓ Yes ✓

همان‌گونه که در جدول ۹ مشاهده می‌شود، در هفت مورد از هشت هدف اثبات، تفاوت میان پاسخ‌های پیش و پس از اجرای ارزیابی الکترونیکی از نظر آماری معنادار است ($p < 0.05$) تنها استثنا مربوط به هدف «تأیید درستی یک گزاره» است که در هر دو مرحله تعداد یکسانی از دانشجویان آن را شناسایی کرده‌اند و تفاوت معناداری مشاهده نشد ($p = 1.000$). این موضوع می‌تواند حاکی از آن باشد که این هدف از پیش درک شده و تأثیر مداخله بر آن محسوس نبوده است. همچنین مشاهده می‌شود که بیشترین رشد در هدف «سازمان‌دهی» دیده می‌شود که از ۱۵ مورد در پیش‌آزمون به ۳۱ مورد در پس‌آزمون افزایش یافته است. این موضوع، یکی از یافته‌های مطلوب در مطالعهٔ حاضر است. با توجه به فراوانی پاسخ‌ها در پرسش‌نامهٔ ۱، تقریباً نیمی از دانشجویان بر این باورند که در اثبات‌هایی که تاکنون در کتاب‌های درسی یا فرایند آموزش مشاهده کرده‌اند، با هدف سازمان‌دهی اثبات مواجه نشده‌اند؛ با وجود این، براساس تعریفی که برای هدف سازمان‌دهی در هر دو پرسش‌نامه ارائه شده است، دانشجویان فرایند اثبات را در ارزیابی پویای الکترونیکی به‌عنوان ابزاری برای مرتبط‌کردن مفاهیم و قوانین ریاضی درک کرده‌اند. این تغییر نشان‌دهندهٔ تأثیر عمیق ارزیابی پویای الکترونیکی در برجسته‌سازی ساختار سازمان‌یافتهٔ اثبات در ذهن دانشجویان است. به‌طورکلی، نتایج بیانگر آن است که ارزیابی پویای الکترونیکی می‌تواند به‌شکل مؤثری در ارتقای شناخت هدفمند دانشجویان از جنبه‌های مختلف اثبات‌های ریاضی نقش‌آفرینی کند. این یافته‌ها از منظر آموزشی اهمیت قابل‌توجهی دارند و بر لزوم بهره‌گیری از شیوه‌های تعاملی و هوشمند در آموزش اثبات‌های ریاضی تأکید می‌ورزند.

در هدف «اثبات به‌عنوان حل مسئله» نیز، افزایش قابل‌توجهی از ۱۷ به ۲۷ نفر مشاهده شد که حاکی از آن است که بسیاری از دانشجویان پس از تجربهٔ ارزیابی پویا، به نقش مسئله‌محور اثبات پی برده‌اند. این موضوع می‌تواند نشانه‌ای از آن باشد که ارزیابی پویای الکترونیکی توانسته است ذهنیت سنتی دانشجویان را که اثبات را صرفاً روشی برای تأیید قضایا می‌دانستند، به چالش بکشد و جای آن را با نگاه کارکردی‌تر و خلاقانه‌تر به اثبات پر کند. از سوی دیگر، رشد معنادار در هدف «کاربرد در موقعیت‌های دیگر ریاضی» نیز (از ۱۸ به ۲۷ نفر) قابل‌توجه است. این نتیجه حاکی از آن است که ارزیابی طراحی‌شده به‌گونه‌ای بوده که بتواند پیوند اثبات با زمینه‌ها و موقعیت‌های دیگر را برای دانشجو آشکار سازد؛ امری که در آموزش سنتی به آن کمتر توجه می‌شود. این رشد می‌تواند نشان‌دهندهٔ آن باشد که طراحی ارزیابی‌هایی با سؤالات چندمرحله‌ای و مبتنی بر کاربرد، می‌تواند در فهم دانشجویان از انعطاف‌پذیری و عمق مفهومی اثبات نقش کلیدی ایفا کند.

لازم به ذکر است که برخی از کارکردها و اهداف اثبات، به‌ندرت شرایط ورود به برنامهٔ درسی در مدارس را دارند [۱، ۴، ۴۷]. برای مثال، استایلیانیدز (Stylianides) معتقد است که اجرای کارکرد «سازمان‌دهی» در سطح مدارس، کاری غیرمحتمل است [۴۷]. لذا یکی از اهداف محقق در مطالعهٔ حاضر آن بود که بررسی کند آیا با کمک ارزیابی پویای الکترونیکی می‌توان دانشجویان ورودی را از این هدف اثبات آگاه کرد و نتایج پرسش‌نامه بیانگر آن بود که می‌توان با استفادهٔ مناسب از این ابزار، این هدف را برای دانشجویان ورودی نمایان ساخت. بعد از انجام ارزیابی، با ۱۰ نفر از دانشجویان مصاحبه‌ای انجام گرفت. در هنگام مصاحبه فرصتی پیش آمد که نظر آن‌ها را دربارهٔ عملکردشان در پرسش‌نامهٔ اهدافِ اثبات به‌طور شفاهی جویا شویم. برخی دانشجویانی که با آن‌ها مصاحبه شد، اذعان داشتند که مشاهده‌ی این ارتباط‌ها بین مفاهیم برایشان جدید بود. برای مثال، دانشجوی شمارهٔ ۳ معتقد بود که *:«... اینکه قسمتی از اثبات جلومون باشه و ببینیم که یک قسمتش با یه چیزی ارتباط داره، اینطوری نخونده بودم...»*.

همچنین دانشجوی شمارهٔ ۱ بر این باور بود که اغلب این اهداف برایش جدید بودند. او در پاسخ به این سؤال که *«آیا به اهدافی که در پرسش‌نامه دیدین، تا حالا فکر کردین یا اون‌ها رو می‌شناختین؟»*

د۱:*«با همشون، نه. بیشتر کاربردش تو موقعیت‌های دیگه رو فهمیده بودم....ما تا الان اثبات یک قضیه رو می‌گذاشتیم جلومون و می‌خوندیم، اینکه سؤال‌های آزمون، قسمت‌های مختلف رو بهم ربط می‌داد، خوب بود.... و در ارزیابی الکترونیکی فهمیدم که مثلاً برا بعضی سوالها از چندتا قضیه میشه استفاده کرد...»*.

از دانشجوی شماره ۴ نیز در مورد تفاوت عملکرد او در دو پرسش‌نامهٔ اهداف اثبات، سؤال گردید:

«قبل از ارزیابی الکترونیکی در پرسش‌نامه اهداف نظرتون این بود که با اهدافِ کاربرد اثبات در موقعیت های جدید و سازمان‌دهی اثبات مواجه نشدید اما بعد از ارزیابی الکترونیکی نظرتون این بود که با این اهداف در ارزیابی الکترونیکی مواجه شدید. می‌تونید بیشتر توضیح بدید؟»

د۴ :*«مواقعی که در دانشگاه امتحان کتبی بود واقعاً هدف یک سری گزاره‌های اثبات رو نمی‌دونستم و نمی‌دونستم قضیه‌ها چطوری به هم مرتبط میشن و فقط در حد حفظیات می‌دونستم یعنی اینطوری نبود که بدونم فلان موضوع بر اساس کاربرد فلان قضیه بوده ولی اون آزمون الکترونیکی که برگزار کردین، قشنگ توضیح داده بود که به این علت یا بر اساس این قسمت از اثبات، این دوتا قضیه به هم مربوط میشن و خب این یعنی کاربردِ قضیه خوب مشخص میشه»*.

با توجه به نتیجهٔ آزمونِ آماری مک‌نمار به‌منظور مقایسهٔ پاسخ دانشجویان در دو پرسش‌نامهٔ ۱ و ۲ و همچنین مصاحبه با برخی دانشجویان در این زمینه، به نظر می‌رسد که ارزیابی پویای الکترونیکی توانسته است نقش خود را به‌عنوان ابزاری برای آگاهی دانشجویان از اهداف اثبات، به‌ویژه برای مرتبط‌کردن مفاهیم و قوانین ریاضی و نشان‌دادن هدف سازمان‌دهیِ اثبات، ایفا کند.

بررسی پاسخ‌های دانشجویان در مصاحبه‌ها نشان می‌دهد که استفاده از ارزیابی پویای الکترونیکی موجب تغییر نگرش آن‌ها دربارهٔ اثبات ریاضی شده است. اغلب دانشجویان اشاره کردند که در شیوه‌های سنتی، اثبات‌ها را صرفاً به‌عنوان مجموعه‌ای از مراحل حفظی می‌نگریستند؛ در

حالی‌که در ارزیابی الکترونیکی توانسته‌اند روابط درونی بین قضایا و مفاهیم را به‌صورت فعالانه کشف کنند. این تجربه نه‌تنها به درک عمیق‌تری از اهداف اثبات منجر شده، بلکه موجب شده است دانشجویان برخی از اهداف کمتر آشنا مانند «کاربرد اثبات در موقعیت‌های دیگر» و «سازمان‌دهی مفاهیم» را نیز تجربه و شناسایی کنند. چنین بازخوردهایی حاکی از آن است که فضای تعاملی ایجادشده در آزمون‌های پویای الکترونیکی، زمینه‌ای مناسب برای فعال‌سازی‌شناختی و بازسازی تجربیات پیشین دانشجویان فراهم کرده است.

نتیجه‌گیری

هدف اصلی این پژوهش، بررسی تأثیر ارزیابی پویای الکترونیکی بر آگاهی دانشجویان از اهداف و کارکردهای مختلف اثبات‌های ریاضی بود. نتایج حاصل از تحلیل داده‌های پرسش‌نامه‌های پیش‌آزمون و پس‌آزمون با استفاده از آزمون آماری مک‌نمار نشان داد که به‌کارگیری الگوی طراحی‌شده از ارزیابی پویای دیجیتال توانسته است درک دانشجویان از اغلب اهداف اثبات ریاضی را *به‌صورت معناداری* ارتقا دهد. مطابق یافته‌ها، درک دانشجویان نسبت به اغلب اهداف اثبات ریاضی پس از تجربهٔ ارزیابی پویای الکترونیکی بهبود یافت؛ به‌ویژه در هدف‌هایی همچون «سازمان‌دهی»، «توضیح و شفاف‌سازی»، «کشف یا ابداع نتایج جدید» و «کاربرد در موقعیت‌های دیگر ریاضی». این یافته‌ها بیانگر آن است که استفاده از بازخوردهای هدفمند، طراحی‌شده و مبتنی بر خطاهای دانشجویان در محیط تعاملی، می‌تواند در تقویت شناخت مفهومی آنان از ساختار و هدف اثبات نقش مؤثری ایفا کند. در این میان، بیشترین تفاوت معنادار مربوط به هدف «سازمان‌دهی» بود که تعداد دانشجویانی که این هدف را تشخیص داده بودند، از ۱۵ نفر در پیش‌آزمون به ۳۱ نفر در پس‌آزمون افزایش یافت. این افزایش به‌خوبی نشان می‌دهد که طراحی دقیق سؤالات و بازخوردهای آموزشی می‌تواند ساختار درونی و انسجام مفاهیم در یک اثبات را برای یادگیرندگان روشن‌تر سازد؛ امری که در اثبات‌های متداول کلاسی ممکن است مبهم باقی بماند.

برخی از محققان معتقدند که هرکدام از اهداف اثبات در شرایط مناسب و با رویکرد آموزشی مخصوص به خود می‌توانند ظاهر شوند [۳۱]. به عنوان مثال برخی از کارکردها و اهداف اثبات مانند هدف سازمان‌دهی، به‌ندرت شرایط ورود به برنامهٔ درسی مدارس را دارند [۴۷]. و ممکن است بعضی از این اهداف و کارکردها در برخی از موضوعات در کلاس درس ریاضی بیشتر از بقیه تأکید کرده اند [۲۸، ۴۷]. در مطالعه‌ی حاضر نیز، محقق به این نتیجه دست یافت که شرایط ارزیابی پویای الکترونیکی، به‌ویژه ارائهٔ بازخوردهای آموزشی می‌تواند برخی از اهداف اثبات، به‌ویژه هدف سازمان‌دهی را برای دانشجویان شفاف و برجسته نماید. پژوهش‌های پیشین نیز به‌لزوم توجه بیشتر به کارکردهای مختلف اثبات اشاره کرده‌اند [۱، ۶، ۱۵، ۲۸، ۳۰، ۴۷]. برای نمونه، هنا و هارل و ساودر بر اهمیت اثبات‌هایی که علاوه بر تأیید گزاره‌ها، جنبه‌های توضیحی و کشف مفاهیم جدید را در بر دارند، تأکید داشته‌اند [۱، ۶]. همچنین دویلی‌یرز نقش اثبات در سازمان‌دهی مفاهیم و ارائهٔ ساختار منطقی در آموزش ریاضی را برجسته کرده است [۲۸]. یافته‌های این پژوهش هم‌راستا با این دیدگاه‌هاست و تأیید می‌کند که فراهم‌آوردن بستر مناسب برای تعامل‌شناختی با محتوای اثبات، همانند آنچه در ارزیابی پویای الکترونیکی طراحی شد، می‌تواند اهدافی مانند «توضیح»، «سازمان‌دهی» و «حل مسأله» را برای دانشجویان ملموس‌تر سازد. در کنار داده‌های کمّی، داده‌های کیفی حاصل از مصاحبه‌ها نیز حاکی از آن بود که بسیاری از دانشجویان پیش از این، در هنگام مواجهه با اثبات‌ها، کمتر به اهدافی چون کاربرد، انتقال یا کشف توجه داشته‌اند. ارزیابی پویای الکترونیکی با ایجاد فضایی پویا و هدف‌مند، به آنان کمک کرد تا ارتباطات مفهومی و ساختاری بین اجزای اثبات را بهتر درک کنند. این امر با گفتهٔ دانشجویان نیز هم‌خوان بود؛ برای مثال، دانشجوی شمارهٔ ۴ به‌وضوح بیان کرده بود که در آزمون الکترونیکی متوجه ارتباط مفهومی بین بخش‌های مختلف اثبات شده است؛ چیزی که در آزمون‌های کتبی سنتی درک نکرده بود.

از دیدگاه نظری، این مطالعه به چارچوب‌های پژوهشی پیشین در حوزهٔ آموزش اثبات می‌افزاید و مدل مفهومی استفاده‌شده در آن می‌تواند الگویی برای طراحی ابزارهای ارزیابی مؤثر در آموزش دانشگاهی باشد. از منظر عملی نیز، نتایج این پژوهش به آموزشگران ریاضی این پیام را می‌دهد که توجه به نقش و کارکرد ارزیابی به‌عنوان ابزار یاددهنده، نه صرفاً سنجش‌گر، می‌تواند کیفیت یادگیری و شناخت مفهومی دانشجویان را بهبود بخشد. به‌ویژه استفاده از ارزیابی‌های تعاملی، دیجیتال و مبتنی بر بازخورد (مانند مدل‌های مبتنی بر نظریهٔ ناحیهٔ مجاور رشد ویگوتسکی) می‌تواند جایگزینی شایسته برای برخی از رویکردهای ایستای سنتی در آموزش مفاهیم پیشرفته باشد [۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۷]. برخی محققان نیز در مطالعهٔ خود نشان می‌دهند که با استفاده از ارزیابی الکترونیکی مبتنی بر بازخورد، این فرصت برای یادگیرندگان فراهم می‌شود که تقریباً بلافاصله در قبال عملکرد خود در محیط ارزیابی پویای الکترونیکی، بازخورد دریافت کنند و لذا درک و استدلال خویش را اصلاح و بهبود بخشند [۲۰، ۲۱، ۲۴، ۲۵]. با توجه به گسترش ابزارهای فناوری اطلاعات و علاقه‌مندی نسل جدید دانشجویان به استفاده از محیط‌های دیجیتال، به‌کارگیری ارزیابی پویای الکترونیکی نه‌تنها امکان‌پذیر، بلکه ضروری به نظر می‌رسد. این پژوهش نشان داد که بهره‌گیری از چنین ابزارهایی می‌تواند سطح درک دانشجویان از اثبات‌ها را از یک رویکرد ایستا و مکانیکی به رویکردی پویا، تحلیلی و هدفمند ارتقا دهد. در مجموع، پیشنهاد می‌شود در برنامه‌های درسی آموزش‌عالی، به‌ویژه در آموزش اثبات‌های ریاضی، استفاده از روش‌های ارزیابی پویا و طراحی‌های آموزشی مبتنی بر بازخورد و تعامل‌شناختی، به‌عنوان بخشی از رویکردهای نوین تدریس و یادگیری مورد توجه قرار گیرد.

این پژوهش نیز همانند سایر مطالعات، با محدودیت‌هایی مواجه بوده است. نخست آنکه جامعهٔ آماری مطالعه فقط شامل دانشجویان ترم دوم رشتهٔ ریاضی در یک دانشگاه دولتی بود که ممکن است تعمیم نتایج را به سایر دانشگاه‌ها و مقاطع تحصیلی با چالش‌هایی مواجه سازد. همچنین، ابزار ارزیابی طراحی‌شده فقط بر یک قضیهٔ خاص و اهداف منتخب تمرکز داشت؛ بنابراین لازم است کارایی آن در موضوعات گوناگون دیگر نیز بررسی شود.

پیشنهاد می‌شود مطالعات آتی با حجم نمونهٔ بیشتر، در مقاطع مختلف تحصیلی و در محیط‌های آموزشی متنوع انجام گیرد .همچنین، بررسی تأثیر بلندمدت ارزیابی پویای الکترونیکی بر تفکر اثباتی و استدلال ریاضی دانشجویان، می‌تواند مسیر پژوهشی جدیدی را فراهم آورد. در نهایت، استفاده از فناوری‌های نوین مانند هوش مصنوعی برای تولید بازخوردهای تطبیقی نیز می‌تواند چشم‌اندازهای نوینی در آموزش اثبات ارائه کند.

مشارکت نویسندگان

میزان مشارکت نویسندگان در نگارش این مقاله به این صورت است: فهیمه کلاهدوز: طرح ایده، بیان مسئله و جمع‌آوری پیشینهٔ تحقیق، نوروز هاشمی: اجرای تحقیق در نمونهٔ گفته‌شده و جمع‌آوری اطلاعات مورد نیاز و حمیدرضا کاشفی: تحلیل داده‌ها و نتیجه‌گیری.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.»

منابع و مآخذ

[1] Stylianides G, Stylianides A, Moutsios-Rentzos A. Proof and proving in school and mathematics education research: A systematic review. ZDM Math Educ. 2023;55(3):567–590.

[2] Weber K, Mejía-Ramos JP, Volpe T. The relationship between proof and certainty in mathematical practice. J Res Math Educ. 2022;53(1):65–84.

[3] Rocha H. Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. Philos Trans A Math Phys Eng Sci. 2019;377(2140):20180045.

[4] Stylianides GJ, Stylianides AJ, Moutsios-Rentzos A. Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. ZDM Math Educ. 2024;56(1):47–59.

[5] Mizrahi M. Proof, explanation, and justification in mathematical practice. J Gen Philos Sci. 2020;51(4):551–68.

[6] Hanna G. Proof, explanation and exploration: An overview. Educ Stud Math. 2000;44:5–23.

[7] Lange M. Inference to the best explanation is an important form of reasoning in mathematics. Math Intelligencer. 2022;44(1):32–8.

[8] Varghese T. Student teachers' conception of mathematical proof [dissertation]. Edmonton (AB): University of Alberta; 2007.

[9] Bayazit N. Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof [dissertation]. Tallahassee (FL): Florida State University; 2009.

[10] Weber K, Inglis M. Mathematics education research on mathematical practice. In: Sriraman B, editor. Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice. Cham: Springer; 2021. p. 1–28.

[11] Weber K, Mejía-Ramos JP, Volpe T. The relationship between proof and certainty in mathematical practice. J Res Math Educ. 2022;53(1):65–84.

[12] Weber K, Mejia-Ramos JP. Mathematics majors' beliefs about proof reading. Int J Math Educ Sci Technol. 2014;45(1):89–103. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2013.790514

[13] Hodds M, Alcock L, Inglis M. Self-explanation training improves proof comprehension. J Res Math Educ. 2014;45(1):62–101. https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/45/1/article-p62.xml

[14] Alcock L, Wilkinson N. e-Proofs: Design of a resource to support proof comprehension in mathematics. Educ Designer. 2011;1(4). Retrieved from

[15] Hanna G, Barbeau E. Proofs as bearers of mathematical knowledge. ZDM Math Educ. 2008;40:345–53.

[16] Inglis M, Alcock L. Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. J Res Math Educ. 2012;43(4):358–90.

[17] Waluyo M, Vidakovich T, Ishartono N, Toyib M. A review of assessing mathematical proving ability. In: Proceedings of the 4th Progressive and Fun Education International Conference (PROFUNEDU 2019); 2019 Aug 6–8; Makassar, Indonesia. European Alliance for Innovation; 2019. p. 50.

[18] Conradie J, Frith J. Comprehension tests in mathematics. Educ Stud Math. 2000;42:225–35.

[19] Mejia-Ramos JP, Fuller E, Weber K, Rhoads K, Samkoff A. An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. Educ Stud Math. 2012;79(1):3–18.

[20] Van den Heuvel-Panhuizen M, Kolovou A, Peltenburg M. Using ICT to improve assessment. In: Kaur B, Yoong WK, editors. Assessment in the Mathematics Classroom: Yearbook 2011. Singapore: World Scientific; 2011. p. 165–86. Retrieved from https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814360999_0008

[21] Wang TH. Implementation of web-based dynamic assessment in facilitating junior high school students to learn mathematics. Comput Educ. 2011;56(4):1062–71.

[22] Wang TH. Developing an assessment-centered e-Learning system for improving student learning effectiveness. Comput Educ. 2014;73:189–203.

[23] Poehner ME. Dynamic Assessment: A Vygotskian Approach to Understanding and Promoting L2 Development. New York: Springer; 2008.

[24] Poehner ME. Dynamic assessment in the classroom. In: The Concise Companion to Language Assessment. 2024. p. 55.

[25] Tzuriel D. Dynamic assessment (DA) of learning potential. In: Mediated Learning and Cognitive Modifiability. 2021. p. 69–88.

[26] Wang TH. Web-based dynamic assessment: Taking assessment as teaching and learning strategy for improving students' e-Learning effectiveness. Comput Educ. 2010;54(4):1157–66.

[27] Alisoy H. Digital dynamics: Transforming classrooms with ICT. Znanstvena misel. 2023;34:3–5.

[28] Marrades M. The role and function of proof in mathematics. In: De Villiers M, editor. Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad. Emeryville (CA): Key Curriculum Press; 1999. p. 3–104.

[29] Weber K. Students' difficulties with proof. MAA Online: Research Sampler [Internet]. 2003 [cited 2025 May 8].

[30] Cadwallader-Olsker T. Proof schemes and proof writing [dissertation]. Claremont (CA): Claremont Graduate University; 2007.

[31] Hemmi K. Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. Educ Stud Math. 2010;75(3):271–91.

[32] Schoenfeld AH. What do we know about mathematics curricula? J Math Behav. 1994;13(1):55–80.

[33] Paddack M. The process of making meaning: The interplay between teachers' knowledge of mathematical proofs and their classroom practices [dissertation]. Durham (NH): University of New Hampshire; 2009.

[34] Brodie K. Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms. New York: Springer; 2010.

[35] Elliott JG. Dynamic assessment in educational settings: Realizing potential. Educ Rev. 2003;55:15–32. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00131910303253

[36] Kozulin A, Garb E. Dynamic assessment of EFL text comprehension of at-risk students. Cogn Educ Psychol. 2018;17(2):117–29. https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=6f10fa210b7ac0288242cd6f940f8a65d629490a

[37] Clark-Wilson A, Robutti O, Sinclair N, editors. The Mathematics Teacher in the Digital Era: International Research on Professional Learning and Practice. Cham: Springer; 2023.

[38] Wiest LR. The role of computers in mathematics teaching and learning. In: Using Information Technology in Mathematics Education. Boca Raton (FL): CRC Press; 2024. p. 41–55.

[39] Kolahdouz F, Radmehr F. Students' performance in paper-and-pencil and dynamic assessments for applying the conditions of theorems in problem solving. Res Math Educ. 2020;1(1):1–13. [In Persian].

[40] Kolahdouz F, Radmehr F, Alamolhodaei H. Exploring students' proof comprehension of the Cauchy Generalized Mean Value Theorem. Teach Math Its Appl. 2020;39(3):213–35. [In Persian].

[41] Roy S, Alcock L, Inglis M. Undergraduates proof comprehension: A comparative study of three forms of proof presentation. In: Proceedings of the 13th Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education. Washington (DC): Mathematical Association of America; 2010.

[42] Reyhani E, Fathollahi F, Kalhadooz F. Investigating students' understanding of the process of constructing mathematical proof based on the model of Ramos et al. Educ Technol Res Q. 2016;10(3):215–22. [In Persian].

[43] Adams, R. A. (2006). Calculus: A complete course (6th ed). Toronto, Canada: Pearson Addison Wesley. (Trans. into Persian by M. A. Rezvani, 2007).

[44] Silverman, R. A. (1985). Calculus with analytic geometry (A. A. Alemzadeh, Trans.). Tehran, Iran: Ghoghnous Publications. (Original work published 1985).

[45] Marón, I. (1981). General mathematics (Kh. Paryab, Trans.; Vol. 1). Tehran, Iran: Paryab Publications. (Original work published 1981).

[46] Anapa P, Samkar H. Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. Procedia Soc Behav Sci. 2010;2:2700–6.

[47] Stylianides AJ. Proof and proving in school mathematics instruction: Making the elementary grades part of the equation [dissertation]. Ann Arbor (MI): University of Michigan; 2005.

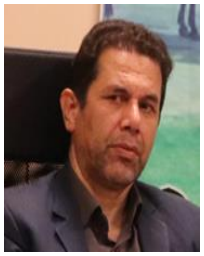
معرفی نویسندگان

AUTHOR(S) BIOSKETCHES

فهیمه کلاهدوز در سال ۱۳۹۶ از دانشگاه فردوسی‌مشهد در رشتهٔ ریاضی کاربردی-گرایش‌آموزش STEAM ، راهبردهای تدریس ریاضی در مقطع دکتری فارغ التحصیل شد. آموزش ریاضی، آموزش حل مسئله، آموزش استدلال و اثبات در ریاضیات و سنجش و ارزشیابی از علایق پژوهشی ایشان است.

F. Kolahdouz, Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P. O. Box 14665-889, Tehran, Iran

f.kolahdouz@cfu.ac.ir



نوروز هاشمی در سال ۲۰۱۵ از دانشگاه صنعتی مالزی (UTM) دررشتهٔ آموزش ریاضی در مقطع دکتری فارغ التحصیل شد. حل مسئله، نظریه‌هایی آموزش ریاضی، ارزشیابی آموزش ریاضی، تعمیم در آموزش ریاضی، مطالعات تطبیقی در آموزش ریاضی و تفکر ریاضی از علایق پژوهشی نام‌برده هستند.

N. Hashemi, Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P. O. Box 14665-889, Tehran, Iran

h.nourooz@cfu.ac.ir

حمیدرضا کاشفی کارشناسی خود را در رشتهٔ ریاضی محض از دانشگاه بیرجند، کارشناسی ارشد را در رشتهٔ ریاضی محض گرایش هندسه از دانشگاه علم و صنعت ایران و ی دکتری خود را در رشتهٔ آموزش ریاضی از دانشگاه صنعتی مالزی (UTM) اخذ کرده و اکنون عضو هیئت‌علمی گروه آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان است. تفکر ریاضی، حل مسئله و راهبردهای تدریس در آموزش ریاضی از علایق پژوهشی ایشان است.

H. Kashefi, Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P. O. Box 14665-889, Tehran, Iran

hkashefi@cfu.ac.ir

Citation (Vancouver): Kolahdouz F, Hashemi N, Kashefi H. [Electronic dynamic assessment of students' awareness of mathematical proof functions]. *Tech. Edu. J. 2025; 19(4): 1003-1018*

https://doi.org/10.22061/tej.2026.12074.3230