



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Improving the mental constructs of seventh grade students in figural pattern generalization: Using APOS theory and structural awareness

R. Afkhami Banaem¹, N. Asghary^{*,1}, A. Medghalchi², F. Pashaie³

¹ Department of Mathematics, statistics and Computer science, Faculty of Basic Science, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

² Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran

³ Department of Mathematics, Faculty of Basic sciences, Maragheh University, Maragheh, Iran

ABSTRACT


Received: 02 May 2023
Reviewed: 2 July 2023
Revised: 14 August 2023
Accepted: 17 September 2023

KEYWORDS:

Figural Pattern Generalization
APOS Theory
Structural Awareness

* Corresponding author

 nas.asghari@iauctb.ac.ir

 (+98912) 2011425

Background and Objectives: The principles and standards of school mathematics (NCTM) in the branch of algebra propose standards that consider the development of students' understanding of algebraic symbolization and especially the understanding of the variable concept as one of the basic needs of students. Functional thinking is also the highway of algebraic thinking and teachers should consider it as the heart and soul of math education. Figural patterns have characteristics that are favorable for starting the generalization and development of functional thinking and can be used in school mathematics. Also, attention to mathematical structure should be an important part of the teaching and learning mathematics. The structure of a mathematical pattern is the way a pattern is organized and is often expressed as a generalization. The purpose of this research was to investigate the performance of students in building the concept of figural pattern generalization based on APOS theory (action-process-object and schema) and to improve the stages using the states of awareness of the structure, and will help teachers and students to have a more accurate evaluation of the figural pattern generalization and better identify the problems and improve their stages of understanding.

Methods: The data collection method was quantitative-qualitative. The data collection tool included a researcher-designed test and a semi-structured interview. The statistical population included 493 seventh grade students of public schools in Malekan city (Azerbaijan-e-sharghi). According to Cochran's sample size formula, 220 male and female seventh-grade students were selected and participated in the researcher-designed test. The validity of the test was checked and confirmed by three mathematics teachers and four experienced teachers. The reliability and internal consistency of the questions were confirmed by finding Cronbach's alpha coefficient and alpha as 0.69.

Findings: Students' mental structures were identified according to APOS theory in the figural pattern generalization. The highest percentage of correct response was at the action stage and the lowest percentage was at the object stage. The stages of APOS were hierarchical and from simple to complex, and the results of this research confirmed the characteristics of this theory. At the action stage, about 18% of the students were unsuccessful, and according to the first attentional state (holing wholes) looking at the figural pattern was introduced as a tool to improve the understanding of these students. About 60% were unsuccessful at the process stage, which the discerning details and recognizing relationships as second and third attentional states helped students to reach the process stage. About 88% of the students failed to reach the object that the fourth attentional state (perceiving properties) as auxiliary tool was introduced. Reasoning on the basis of identified properties as the fifth attentional state was used to upgrade students to the schema stage in APOS theory.

Conclusion: This research provided a framework for measuring and evaluating students in the figural pattern generalization that teachers can use in better teaching of this concept. At each stage, solutions can be provided according to the student's stage to improve their understanding of generalization to higher stage. This research showed the power of APOS theory in compatibility with other constructionist theories. Adapting the APOS theory with the theory of structural awareness and benefiting from this adaptation in order to improve the stage of understanding of the seventh-grade students in figural pattern generalization was considered as one of the innovative aspects of this research.



NUMBER OF REFERENCES

35



NUMBER OF FIGURES

2



NUMBER OF TABLES

3



COPYRIGHTS

© 2024 The Author(s). This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

مقاله پژوهشی

ارتقای سازه‌های ذهنی دانش‌آموزان پایه هفتم در تعمیم الگوهای شکلی: به‌کارگیری نظریه APOS و آگاهی از ساختار

ربابه افخمی بنائم^۱، نسیم اصغری^{۱*}، علیرضا مدقالچی^۲، فیروز پاشائی^۳^۱ گروه ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران^۲ گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران^۳ گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

چکیده

پیشینه و اهداف: اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای (NCTM) در شاخه جبر، استانداردهایی را مطرح می‌کند که توسعه فهم دانش‌آموزان از نمادین‌سازی جبری و به‌ویژه، درک مفهوم متغیر را، از نیازهای اساسی دانش‌آموزان می‌داند. تفکر تابعی نیز، شاهراه تفکر جبری است و معلمان، بایستی آن را به‌عنوان قلب و روح آموزش ریاضی به‌شمار آورند. الگوهای شکلی، مشخصه‌هایی دارند که برای شروع تعمیم و توسعه تفکر تابعی، مطلوب هستند و می‌توان در ریاضیات مدرسه‌ای از آن بهره برد. همچنین، توجه به ساختار ریاضی باید بخش مهمی از یاددهی و یادگیری ریاضی باشد. ساختار یک الگوی ریاضی، روشی است که یک الگو، سازماندهی شده و غالباً به شکل تعمیم بیان می‌شود. هدف این تحقیق، بررسی عملکرد دانش‌آموزان در ساخت مفهوم تعمیم الگوهای شکلی براساس نظریه APOS (عمل-فرآیند-شیء و طرح‌واره) و ارتقای سطوح با استفاده از حالت‌های آگاهی از ساختار است و معلمان و دانش‌آموزان را کمک خواهد کرد تا ارزیابی دقیق‌تری از فرآیند تعمیم الگوهای شکلی، داشته باشند و مشکلات را بهتر شناسایی کرده و سطح درک خود را بهبود دهند.

روش‌ها: روش جمع‌آوری داده‌ها، کمی-کیفی و ابزار جمع‌آوری داده‌ها، شامل آزمون محقق ساخته و مصاحبه نیمه‌ساختاریافته بود. جامعه آماری، دانش‌آموزان پایه هفتم مدارس دولتی شهرستان ملکان (آذربایجان شرقی) به تعداد ۴۹۳ نفر بودند. مطابق با فرمول تعیین حجم نمونه کوکران، تعداد ۲۲۰ نفر دانش‌آموز دختر و پسر پایه هفتم انتخاب شدند و در آزمون محقق ساخته شرکت کردند. روایی آزمون را سه آموزشگر ریاضی و چهار معلم مجرب، بررسی کرده و مورد تأیید قرار دادند. پایایی آزمون و هماهنگی درونی سؤال‌ها با یافتن ضریب آلفای کرونباخ و آلفای ۰/۶۹ تأیید شد.

یافته‌ها: سازه‌های ذهنی دانش‌آموزان، طبق نظریه APOS در تعمیم الگوهای شکلی، شناسایی شد. بیشترین درصد پاسخ‌گویی درست در سطح عمل و کمترین درصد در سطح شیء بود. مراحل APOS سلسله مراتبی و از ساده به پیچیده است و نتایج این تحقیق، تأییدی بر ویژگی‌های این نظریه است. در سطح عمل، حدود ۱۸ درصد دانش‌آموزان ناموفق بودند که طبق اولین حالت توجه به ساختار، خیره نگاه کردن به الگوی شکلی به‌عنوان ابزار ارتقای فهم این دانش‌آموزان معرفی شد. حدود ۶۰ درصد در سطح فرآیند، ناموفق بودند که تمییز جزئیات و شناسایی روابط دومین و سومین حالت‌های توجه به ساختاری هستند که دانش‌آموزان را در رسیدن به سطح فرآیند کمک می‌کنند. حدود ۸۸ درصد دانش‌آموزان به سطح شیء نرسیده بودند که ادراک ویژگی‌های الگوهای شکلی به‌عنوان چهارمین حالت توجه، ابزار کمکی برای ارتقای سطح معرفی شد. استدلال بر مبنای ویژگی‌ها نیز، آخرین حالت توجه به ساختار هست که برای رساندن دانش‌آموزان به سطح طرح‌واره در نظریه APOS می‌تواند کارساز باشد.

تاریخ دریافت: ۱۲ اردیبهشت ۱۴۰۲
تاریخ داوری: ۱۱ تیر ۱۴۰۲
تاریخ اصلاح: ۲۳ مرداد ۱۴۰۲
تاریخ پذیرش: ۲۶ شهریور ۱۴۰۲

واژگان کلیدی:

تعمیم الگوهای شکلی
نظریه APOS
آگاهی از ساختار

* نویسنده مسئول

nas.asghari@iauctb.ac.ir

① ۰۹۱۲-۲۰۱۱۴۲۵

نتیجه گیری: این تحقیق، چهارچوبی برای سنجش و ارزیابی دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی فراهم کرده است که معلمان می‌توانند از آن در آموزش بهتر این مفهوم استفاده کنند. در هر مرحله، می‌توان راهکارهایی متناسب با سطح دانش‌آموز ارائه داد تا درک او از تعمیم، به سطوح بالاتر، ارتقا یابد. این تحقیق، قدرت نظریه APOS را در سازگاری با سایر نظریه‌های ساخت و سازگرا نشان می‌دهد. تطبیق نظریه APOS با نظریه آگاهی از ساختار و بهره‌مندی از این تطبیق در جهت ارتقای سطح درک دانش‌آموزان پایه هفتم در تعمیم الگوهای شکلی از جنبه‌های نوآورانه این تحقیق محسوب می‌شود.

مقدمه

الگوها، دانش قدرتمندی هستند که ماهیت دوگانه‌ای دارند. هم به‌عنوان محتوای اصلی ریاضی و هم به‌عنوان رفتار کلیدی ریاضی، قلمداد می‌شوند [۱]. کار با الگوها و تعمیم دادن آن‌ها، زمینه مناسبی برای قراردادن دانش‌آموزان در موقعیت‌های مهم ریاضی از جمله توابع، آشنایی با مفهوم متغیر و حرکت به سمت تفکر جبری فراهم می‌کند [۲]. جبرورزی، یکی از مشکلاتی است که بیشتر دانش‌آموزان با آن مواجه هستند. یک راه برای غلبه بر این مشکل، استفاده مناسب از شکل‌های مختلف استدلال جبری در آموزش ریاضی از همان پایه‌های اولیه است [۳]. کاپوت، استدلال جبری را به صورت یک نوع استدلال تعریف می‌کند که دانش‌آموزان در آن، ایده‌های ریاضیات را از یک مجموعه با مثال‌های خاص، تعمیم می‌دهند [۴]. تفکر تابعی را بلانتون و کاپوت، مسیر اصلی تفکر جبری [۵] و کاراها و شیلمن دروازه ورود به تفکر جبری، بیان می‌کنند [۶]. تفکر تابعی، با مفهوم تابع در هم تنیده است و نمی‌تواند به تنهایی در نظر گرفته شود. مشخص شده است که موضوع تابع برای بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستانی مشکلاتی ایجاد می‌کند. دلایل این مشکلات را می‌توان در ویژگی انتزاعی توابع یافت که این مفهوم را تنها از طریق مدل‌سازی در بازنمایی‌ها و تمرکز بر تغییرات بین چنین نمایش‌هایی قابل دسترسی می‌کند [۷]. تعمیم الگو، مثال خوبی برای ایجاد یک درک مفهومی قوی برای کار با توابع در سال‌های بعدی تحصیل است [۸]. تعمیم الگوهای شکلی، به‌عنوان یک زمینه محسوس برای بازنمایی توابع، ظرفیتی بی‌نظیر برای ارتقای تفکر تابعی دارند [۹-۱۰] که می‌توان از آن به‌منزله ابزاری برای تسهیل تفکر جبری دانش‌آموزان استفاده کرد. یکی از مفاهیمی که ریورا (Rivera) در مدل تعمیم الگوها بدان پرداخته، ساختار ریاضی است [۹]. طبق بیان واتسن، توجه به ساختار ریاضی باید بخش مهمی از یاددهی و یادگیری ریاضی باشد [۱۱]. پاییک، مولیگان و میچلمور بیان می‌کنند که ساختار یک الگوی ریاضی، روشی است که یک الگو سازماندهی می‌شود و غالباً به شکل تعمیم بیان می‌شود [۱۲]. میسون، استفنز و واتسن، ساختار ریاضی را به معنای شناسایی خواص کلی که در موقعیت‌های ویژه‌ای مانند روابط بین عناصر، قرار دارند، در نظر می‌گیرند [۱۳]. بررسی چگونگی ساختار و ساز مفهوم تعمیم در الگوهای شکلی و توجه به سطوح آگاهی از ساختار، می‌تواند مسیر یاددهی و یادگیری این مفهوم را هموارتر سازد. این چرخه ساختار و ساز ذهنی، به‌صورت‌های گوناگون اشاره شده است: عمل-فرآیند-شیء- طرح‌واره (APOS) دوبینسکی [۱۴]، درونی‌سازی،

فشرده‌سازی و شیء‌انگاری اسفارد [۱۵] یا رویه، فرآیند و فرهوم‌گری و تال [۱۶]. هدف این تحقیق: (الف) بررسی عملکرد دانش‌آموزان در ساخت مفهوم تعمیم الگوهای شکلی براساس نظریه APOS و (ب) ارتقای سطح درک دانش‌آموزان با استفاده از حالت‌های آگاهی از ساختار میسون و همکاران است و معلمان و دانش‌آموزان را کمک خواهد کرد تا ارزیابی دقیق‌تری از فرآیند تعمیم الگوهای شکلی داشته باشند و مشکلات را بهتر شناسایی کرده و سطح درک خود را بهبود دهند. تطبیق نظریه APOS با نظریه آگاهی از ساختار و بهره‌مندی از این تطبیق در جهت ارتقای سطح درک دانش‌آموزان پایه هفتم در تعمیم الگوهای شکلی از جنبه‌های نوآورانه این تحقیق محسوب می‌شود.

تعمیم الگوهای شکلی

الگوها، در حالت کلی دو نوع هستند؛ عددی و شکلی [۷ و ۹]. الگوهای عددی دنباله‌ای از اعداد هستند که بین تمام اعداد یک قانون وجود دارد. الگوهای شکلی نیز، در دو دسته اصلی الگوهای تکرارشونده و الگوهای افزایشی/کاهشی قرار می‌گیرند. در این دو دسته، به مشخصه‌های اصلی ساختارها در بافت الگوها می‌توان پی برد؛ در الگوهای شکلی تکرارشونده، یک واحد تکرار هسته‌ای وجود دارد که پایه تعمیم است [۹]. تفکر ضربی قادر می‌سازد که واحد تکرار هسته‌ای تکرار شده و تعمیم انجام شود. در الگوهای افزایشی/کاهشی، اشیا در شکل، از موردی به مورد دیگر به‌صورت نظام‌مند و قابل پیش‌بینی، تغییر می‌کنند [۱۷]. تعمیم در الگوها، بدین معنی است که دانش‌آموزان از روی موارد خاص، مشترکات را شناسایی می‌کنند یا عمل تجرید به معنای «دیدن عام از طریق خاص» را انجام می‌دهند و سپس، این مشترکات را به موارد بعدی توسعه می‌دهند. توانایی تعمیم، عنصر بسیار مهمی برای جبر رسمی به ویژه برای کار با توابع است [۸]. اسمیت، تفکر تابعی را نوعی تفکر بازنمایی می‌داند که روی روابط بین دو کمیت متغیر یا بیشتر تمرکز دارد؛ به ویژه نوعی از تفکر که منجر به تعمیم‌سازی از روابط خاص می‌شود [۱۸] (نقل از [۱۹]). در واقع، در عمل تعمیم تمرکز به جای موارد خاص بر روی الگوها، رویه‌ها، ساختارها و روابط بین آن‌هاست. الگوهای شکلی افزایشی، در ساختارهای متفاوتی می‌توانند ظاهر شوند. رابطه تابعی که برای این الگوها نوشته می‌شود، جزئی از ساختار الگوها است؛ در صورتی که تفکر ساختاری، این است که این روابط در تمییز ساختار الگوها و ویژگی‌های تغییر در الگوها به کار روند و در تشخیص این که رابطه مورد نظر برای کدام الگوها شامل می‌شود و کدام الگوها نه، کمک کند.

نظریه APOS

در دهه دوم سده حاضر، نظریه APOS به خوبی در محافل تحقیقاتی آموزش ریاضی به عنوان یک رویکرد شناختی پیشگام در یادگیری تثبیت شده است [۲۰]. نظریه APOS چارچوبی است که بیان می کند افراد چگونه با ساختن و استفاده کردن از ساختارهای مشخصی، معانی مفاهیم ریاضی را می سازند. ساختارها، در نظریه APOS طی مراحل عمل، فرآیند، شیء، و طرحواره شکل می گیرند [۲۱]. این ساختارها، از طریق سازوکارهای ذهنی درونی سازی، فشرده سازی، هماهنگ سازی، معکوس سازی، جداسازی، موضوع بندی، تجزیه و تعمیم ایجاد می شوند که در این بخش، صرفاً تعریف مواردی که نیاز است، بیان می شود. ادراک یک مفهوم، ابتدا به صورت عمل بیرونی خارج از ذهن است که به صورت آشکار انجام می شود و با یک دستورالعمل بیرونی هدایت می شود. در واقع، یک مفهوم در سطح عمل به روش مکانیکی درک می شود و فاقد روابط درونی معنادار با دیگر مفاهیم ریاضی است. هر عمل، متشکل از گام هایی است که هر گام، هدایت کننده به گام بعدی است؛ یعنی گام ها، نمی توانند حدس زده شوند و تصور شوند و از هیچکدام نمی توان جهش کرد. فرآیندها، با استفاده از یکی از دو مکانیسم ذهنی درونی سازی یا هماهنگ سازی ساخته می شوند. چنانچه عمل ها تکرار شوند و روی آن ها بازتاب شود، افراد به جای تکیه بر نشانه های بیرونی به کنترل درونی آن ها توجه می کنند. از مشخصه های این مرحله، توانایی تصور گام ها بدون نیاز به انجام صریح آن ها و توانایی جهش از روی گام ها و معکوس سازی آن ها است. درونی سازی مکانیسمی است که این انتقال ذهنی را فراهم می کند. درونی سازی، موجب می شود تا فرد عمل را به صورت آگاهانه انجام دهد، روی آن تعمق کند و آن را با اعمال دیگر ترکیب نماید [۲۱]. فشرده سازی، زمانی رخ می دهد که فرد یک عمل را روی فرآیند انجام می دهد؛ یعنی یک ساختار پویا (فرآیند) را به صورت ساختار ایستایی که عملیات روی آن قابل انجام است، می بیند. اگر فردی از فرآیند مانند یک کلیت آگاه باشد، درک می کند که تبدیلات می توانند روی آن کلیت عمل کنند و می توان چنان تبدیلاتی را واقعی (به طور صریح یا در تصور) ساخت. در این صورت، فرد فرآیند را به یک شیء شناختی فشرده سازی کرده است. وقتی یک فرآیند به یک شیء فشرده شده است، می تواند زمانی که نیاز باشد به فرآیندهای تشکیل دهنده جداسازی شود یا به عبارت دیگر، با به کار بردن مکانیسم جداسازی فرد می تواند به فرآیندی برگردد که شیء از آن برآمده بود. در APOS طرحواره ها یک مجموعه منسجم از عمل ها، فرآیندها، شیء ها و طرحواره های ساخته شده قبلی هستند [۲۱-۲۲]. طبق نظر دوبینسکی، یک طرحواره به علت پویایی و بازسازی های پیوسته اش در فعالیت های ریاضی که افراد در موقعیت های ریاضی خاص انجام می دهند، مشخصه سازی می شود [۲۲]. انسجام طرحواره از طریق توانایی فرد برای تعیین این که آیا طرحواره می تواند در موقعیت ریاضی خاص استفاده شود، مشخص می شود. زمانی که یک طرحواره مانند مجموعه ای منسجم از ساختارها (عمل، فرآیند، شیء و سایر طرحواره ها) و اتصال های برقرار

شده میان آن ساختارها، ساخته می شود می تواند به یک ساختار ایستا (شیء) تبدیل شود و یا به عنوان ساختار پویا که اشیا یا طرحواره های دیگر را جذب می کند، استفاده شود.

آگاهی از ساختار

ریشه های تحقیق و جستجو برای ساختارهای ریاضی را، می توان در کارهای اقلیدس تا گاوس و سپس در سده نوزده در نظریه اصل موضوعی پنانو در حساب، اصول موضوعه های گوناگون برای هندسه ناقلیدسی، گروه ها، حلقه ها و میدان ها و مانند آن یافت [۱۳]. ساختار ریاضی، به معنای شناسایی خواص کلی که در موقعیت های ویژه ای مانند روابط بین عناصر، معرفی می شوند، در نظر گرفته می شود. این عناصر، می توانند اشیای ریاضی مانند اعداد، مثلث ها، مجموعه ها، روابط بین مجموعه ها، روابط بین روابط در یک سلسله مراتب پیشرونده باشند. باید توجه داشت که با شناسایی یک رابطه بین دو شیء یا بیشتر، تفکر ساختاری نیست؛ بلکه استفاده کردن از این روابط برای ویژگی ها یا به عبارتی، آگاهی از به کارگیری ویژگی ها، هسته تفکر ساختاری است. در واقع، تفکر ساختاری به منزله تمایل به استفاده، توضیح، تشریح و اتصال این ویژگی ها در تفکر ریاضی یک فرد تعریف می شود. ساختارها، مانند اصول موضوع کلی هستند که به یادگیرنده امکان می دهند تا ویژگی های خاص تری را استنتاج کنند. بنابراین، تفکر ساختاری صرفاً عملی برای شناسایی روابط و ویژگی ها نیست؛ بلکه بیشتر در مورد به کارگیری آن در تفکر شخص نسبت به مجموعه اشیای ریاضی است [۹]. روبرو حاصل مطالعه اش در مورد تعمیم الگوها و جنبه های مرتبط را در یک مدل نشان می دهد [۹]. یکی از این جنبه ها، آگاهی از ساختار است. میسون و همکاران، چارچوبی را مطرح می کنند که بر سطوح آگاهی مختلف یا حالت های توجه مربوط به تمیز ساختاری، متمرکز است. براساس نظریه آن ها، حداقل پنج سطح مختلف از توجه و آگاهی وجود دارد که از ایجاد تفکر ساختاری حمایت می کند [۱۳]:

- تصرف کل (خیره نگاه کردن)
 - تشخیص جزئیات (ایجاد تمایز)
 - شناسایی روابط (در بین عناصر خاص مشخص شده)
 - ادراک ویژگی ها (به منزله عمومیت هایی که احتمالاً در موقعیت های خاص معرفی می شوند).
 - استدلال بر مبنای ویژگی های شناسایی شده
- تصرف کل، از طریق خیره و دقیق نگاه کردن است که تصویرها را تولید می کند. در این حالت، از آگاهی دانش آموزان اساساً به ساختارهای پیش-زمینه و پس زمینه توجه می کنند. برای مثال، نمودار تابع در آغاز می تواند در سطح شکل های نوشتاری، شکل و جهت، مورد توجه قرار گیرد. در تعمیم الگوهای شکلی، اگر دانش آموز دقیق و خیره به موارد موجود (شکل ۱ و ۲ و ۳) نگاه کند؛ این سطح آگاهی، موجب رسم دقیق شکل بعدی الگو و به عبارتی موفقیت دانش آموزان در مرحله عمل می شود. تشخیص جزئیات، توجه دانش آموزان را به سمت تحلیل های بیشتر و

اولیای دانش‌آموزان، با ۱۹ دانش‌آموز مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته به عمل آمد.

سؤال‌های تحقیق

در این تحقیق، طبق داده‌های کمی و کیفی به سؤال‌های زیر، پاسخ داده می‌شود:

- عملکرد دانش‌آموزان، در ساخت مراحل تعمیم الگوهای شکلی طبق نظریه APOS چگونه است؟
- هریک از سطوح APOS در تعمیم الگوهای شکلی با کدام حالت آگاهی از ساختار میسون و همکاران مطابق است و چگونه می‌توان سطح درک دانش‌آموزان را ارتقا داد؟

ابزار تحقیق

آزمون اولیه، شامل ۴ تکلیف (۲۴ سؤال) با موضوع الگوهای شکلی براساس چهارچوب APOS طراحی شد و روایی آزمون را سه آموزشگر ریاضی و چهار معلم مجرب، بررسی کرده و مورد تأیید قرار دادند. پایایی آزمون و هماهنگی درونی سؤال‌ها، با یافتن ضریب آلفای کرونباخ و آلفای $0/69$ تأیید شد. تکالیف الگوهای شکلی، با توجه به پیشینه تحقیق و مطالعه توابع، و با توجه به مشخصه‌های تکالیف الگوها [۲۳] که تعداد متغیرها و خطی و غیرخطی بودن از جمله آن‌ها است، طبق دسته‌بندی محقق [۲۴] در چهار دسته زیر قرار گرفت که به ترتیب در تکلیف ۱ الی ۴ در پیوست ۱ آمده است:

یک‌متغیره خطی (تکلیف ۱): رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود؛ تابع خطی با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته به شکل کلی $f(x) = ax + b$ است. به‌عنوان مثال رابطه تابعی تکلیف ۱ به صورت $f(n) = 3n + 2$ می‌باشد.

یک‌متغیره درجه‌دوم (تکلیف ۲): رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود، تابع درجه‌دوم با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته به شکل کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. رابطه تابعی تکلیف ۲ به صورت $f(n) = n(n + 2) + 2 = n^2 + 2n + 2$ است.

دوخطی (تکلیف ۳): رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود، تابع دوخطی با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. این توابع نسبت به هر دو متغیر خطی هستند. رابطه تابعی تکلیف ۳ به صورت $f(n, m) = nm$ است.

دومتغیره کلی (تکلیف ۴): رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود، تابع دومتغیره است که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. رابطه تابعی تکلیف ۴ به صورت $f(n, m) = n(m + 2) + 2 = nm + 2n + 2$ است.

ویژگی‌هایی که در طراحی سؤال‌های الگوهای شکلی لحاظ شده است؛ عبارتند از: (۱) در همه سؤال‌ها از شکل مربع استفاده شده است. (۲) همه الگوها، ساختار پیوسته داشتند. (۳) همه الگوها، درجه وضوح یکسان داشتند؛ به این معنی که متغیرهای مستقل در اشکال قابل دسترسی بود. (۴) همه الگوها طبق قوانین گشتالت طراحی شدند؛ به این معنی که از نظر ظاهری ساختار مشابهی داشتند؛ به این صورت که اشکال یک

توصیف‌های عمیق‌تر انتقال می‌دهد. اجزا با جزئیات براساس آنچه که آن‌ها بررسی آن را معنادار می‌بینند، ساخته شده و توصیف می‌شوند. محتوای مورد بررسی را می‌توان بر اجزایی که تغییر می‌کنند و یا ثابت می‌مانند، متمرکز کرد. در مثال نمودار تابع، آن‌ها ممکن است نمودارها را برای تقارن، تعداد و ماهیت نقاط تقاطع، تغییرات در نمودار زمانی که ضرایب به وسیله دامنه تغییر می‌کند و غیره بررسی کنند. در مثال الگوها، توجه به جزئیات شکل و درک آنچه که ثابت می‌ماند و آنچه تغییر می‌کند، دانش‌آموز را به سمت درونی‌سازی عمل پیش می‌برد. شناسایی روابط زمانی اتفاق می‌افتد که تحلیل روابط متغیر و ثابت منتقدانه‌تر از قبل باشد. علاوه بر این، تغییر روابط مفهومی ساخته شده ممکن است به‌صورت همبسته و یا علی باشند. به‌عنوان مثال، نمودارهای توابع خطی را می‌توان با توجه به ماهیت شیب‌شان دسته‌بندی کرد و شباهت‌ها و تفاوت‌های رفتار توابع جبری و متعالی را می‌توان به واسطه بررسی بازنمایی‌های گرافیکی و نمادین آن‌ها تعیین نمود. در مثال الگوهای شکلی، این سطح از آگاهی موجب درک ساختار فیزیکی الگوی شکلی می‌شود و دانش‌آموز روابط درونی و بیرونی اشکال را می‌تواند توضیح دهد. حالت ادراک ویژگی‌ها، دسته‌بندی بیشتری از اشیای مختلف و کلاس‌های عمومی از اشیای مرتبط را ممکن می‌سازد. در مثال الگوها، این سطح آگاهی باعث می‌شود که دانش‌آموز خواص الگوی شکلی را درک کند و این خواص را به‌صورت شیء فشرده‌سازی کرده و روابط نمادین بسازد. استدلال بر مبنای ویژگی‌های تعیین شده، مهم‌ترین مرحله است که در آن استدلال استقرایی و قیاسی درباره اشیای خاص و اشیای مرتبط به علت بررسی این که چه موارد دیگری ممکن است به ساختار درک شده متعلق باشند یا نباشند، به استدلال استنتاجی انتقال می‌یابند. در مثال الگوهای شکلی، دانش‌آموزی که این حالت از آگاهی را داشته باشد می‌تواند بین شکل‌های مختلف الگوها که منجر به روابط خطی/ غیرخطی و یک‌متغیره/ دومتغیره می‌شود، تشخیص دهد و طرح‌واره منسجمی از انواع الگوهای شکلی و ساختار ریاضی آن‌ها داشته باشد.

روش تحقیق

تحقیق حاضر، بخشی از یک تحقیق گسترده است که به روش تحقیق کمی- کیفی (آمیخته) انجام شده است. روش کمی تحقیق، از نوع پیمایشی و روش کیفی از نوع تحلیل محتوا محسوب می‌شود. جامعه آماری، دانش‌آموزان پایه هفتم مدارس دولتی شهرستان ملکان به تعداد ۴۹۳ نفر بودند. مطابق با فرمول تعیین حجم نمونه کوکران، تعداد ۲۲۰ نفر دانش‌آموز دختر و پسر پایه هفتم شهرستان ملکان (آذربایجان شرقی) انتخاب و در آزمون اولیه شرکت کردند. مدت زمان پاسخ‌گویی حدوداً ۴۰ دقیقه بود. در این مرحله تحقیق، ۲۲۰ دانش‌آموز پایه هفتم پاسخ داد ولیکن ۱۸۸ برگه تحلیل و کدگذاری گردید. ۳۲ برگه پاسخ به دلیل ناخوانا بودن و یا خالی بودن، کنار گذاشته شد. سپس، در مرحله بعد با دریافت رضایت از اداره آموزش و پرورش شهرستان و مدیران مدارس و

کمتر از مرحله عمل است. مراحل APOS، سلسله مراتبی و از ساده به پیچیده است و مرحله شیء در سطح شناختی بالاتر، اتفاق می‌افتد و نتایج این تحقیق، تأییدی بر ویژگی‌های این نظریه است. طبق جدول ۲، در مرحله عمل حدود ۱۸ درصد دانش‌آموزان نتوانسته‌اند به درستی الگوی بعدی را رسم کنند. طبق تعریف APOS، در این مرحله کفایت دانش‌آموزان به نشانه‌های بیرونی الگوها خوب نگاه کنند، بشمارند و بکشند. بنابراین، تعریف دانش‌آموزانی که به سطح عمل نرسیده‌اند نتوانسته‌اند شکل بعدی را از روی شکل‌های قبلی، رسم کنند. در مرحله فرآیند، طبق تعریف APOS دانش‌آموزان بایستی چگونگی رسم الگوی بعدی را بدون ترسیم روی کاغذ، توضیح دهند و بدون کشیدن الگوهای متوالی یک تعمیم دور بسازند و بتوانند به سؤالات معکوس که شماره شکل را خواسته پاسخ دهند که حدود ۶۰ درصد آن‌ها، ناموفق بودند. در مرحله فرآیند، دانش‌آموز با پیدا کردن اختلاف بین شکل‌ها و توضیح دادن ساختار هر شکل، عمل را درونی‌سازی می‌کند. چنانکه تحقیقات نشان می‌دهد؛ دانش‌آموزان اغلب فاقد زبانی هستند که با آن در مورد تعمیم، بحث کنند [۲۵-۲۶]. دانش‌آموزانی که تفکر خود را شمرده و مفصل بیان می‌کنند، امکان بیشتری دارند که در تعمیم موفق عمل کنند [۲۶-۲۷]. از دلایل ناموفق بودن آن‌ها در ارائه یک توضیح ساختارمند و مفید که منجر به تعمیم جبری موفق نیز بشود، دقت نکردن به اختلاف بین شکل‌ها و قسمت‌های ثابت و متغیر آن‌هاست که منجر به عدم تشخیص روابط بین شکل‌ها می‌شود. در مرحله شیء، در مرحله نوشتن رابطه، حدود ۶۸ درصد دانش‌آموزان ناموفق بودند که از دلایل آن عدم درک مفهوم متغیر است [۲۸-۲۹].

میانه و دو تکه در بالا و پایین داشتند و با قوانین گشتالت یکسانی، ادراک می‌شدند. این ابزار، برای شناسایی سازه‌های ذهنی دانش‌آموزان طبق چارچوب APOS در تعمیم الگوهای شکلی، مورد استفاده قرار گرفت. سپس، ۱۹ نفر در مصاحبه نیمه‌ساختاریافته شرکت کرده و به سؤالات ۲۹-۲۵ (پیوست ۲ و ۳) پاسخ دادند. در این مرحله از تحقیق، ساخت ذهنی دانش‌آموزان (سطوح چهارگانه APOS) دقیق‌تر بررسی شد و مطابق با حالت‌های آگاهی از ساختار میسون و همکاران به آن‌ها تذکرها و تکالیفی داده شد. اهداف و محتوای هریک از سؤالات، در جدول ۱ درج شده است. با توجه به برگه‌های پاسخ دانش‌آموزان، اگر سؤالی به‌طور کامل پاسخ داده شده بود به آن کد ۱ اختصاص می‌یافت و در غیر این‌صورت، کد ۰. به‌عنوان مثال، اگر دانش‌آموزان در سؤالات ۱۳، ۱۷، ۱۹ الگوی بعدی را به درستی می‌کشیدند، به پاسخ آن‌ها کد ۱ اختصاص می‌یافت.

نتایج تحقیق و بحث

در این بخش، به دو سؤال تحقیق به ترتیب پاسخ داده می‌شود و یافته‌ها در هر سؤال، تحلیل می‌شود.

سؤال اول: عملکرد دانش‌آموزان در ساخت مراحل تعمیم الگوهای شکلی طبق نظریه APOS چگونه است؟

جدول ۲ نشان می‌دهد که در هر چهارنوع الگوی خطی، تعداد دانش‌آموزانی که به مرحله شیء رسیده‌اند، بسیار کمتر از دانش‌آموزان مرحله عمل و فرآیند است و تعداد دانش‌آموزان موفق در مرحله فرآیند،

جدول ۱: طراحی سؤالات طبق نظریه APOS
Table 1: Designing the items based on APOS theory

اهداف (Goals)	محتوا (Content)	سؤال‌ها (Number of items)
شناسایی سطح عمل (Identifying the action stage)	کشیدن شکل بعدی الگو (Drawing next pattern)	19-13-7-1
	توضیح شکل بعدی بدون کشیدن (Explaining the next pattern without drawing)	20-14-8-2
	معکوس کردن مراحل برای به‌دست آوردن شماره شکل (Reversing the steps to get the figure number)	21-15-9-3
شناسایی سطح فرآیند (Identifying the process stage)	تعمیم دور (Far generalization)	22-16-10-4
	نوشتن رابطه جبری (Writing an algebraic relation)	23-17-11-5
	دست‌ورزی با رابطه (Manipulating with relation)	24-18-12-6
شناسایی سطح شیء (Identifying the object stage)	تبدیل شیء به فرآیند برآمده از آن؛ کشیدن الگوی شکلی از روی رابطه جبری مفروض (De-encapsulating relation to their process)	26-25
	تعیین نوع و ویژگی الگوهای شکلی به‌صورت مستدل (Determining type and property of figural pattern, reasonably)	29-27
شناسایی سطح طرح‌واره (Identifying the schema stage)		

جدول ۲: عملکرد دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی طبق نظریه APOS
Table 2: Students' performance in figural pattern generalization based on APOS theory

شماره تکلیف Task Number	سطح عمل Action stage	سطح فرآیند Process stage	سطح شی Object stage			
	کشیدن الگوی بعدی Drawing next pattern	توضیح الگوی بعدی بدون کشیدن Explaining the next pattern	تعمیم دور Far generalizing	معکوس کردن مراحل Reversing the steps	نوشتن رابطه Writing algebraic relation	دست‌ورزی با رابطه Manipulating with relation
تکلیف 1 Task 1	88.8%	63.8%	59.6%	66.7%	52.7%	5.6%
تکلیف 2 Task 2	72.9%	30.3%	21.3%	17.5%	18.1%	0%
تکلیف 3 Task 3	91.5%	44.1%	56.9%	40%	44.7%	2.7%
تکلیف 4 Task 4	76.1%	20.2%	22.9%	20%	12.8%	1.8%
میانگین درصدها Average percent	82.3%	39.6%	40.2%	36.1%	32.1%	2.5%

درصد ناموفقیت، زمانی که نیاز بود با رابطه دست‌ورزی کنند، خیلی بیشتر می‌شد. این مطلب، نشان می‌دهد گرچه تعدادی در نوشتن رابطه موفق بوده‌اند؛ اما هنوز درک معناداری از ویژگی‌های الگو ندارند که بتوانند به صورت معناداری با رابطه دست‌ورزی کنند. مکانیسم فشرده‌سازی، منجر به توانایی استفاده از نماد به جای فرآیندهای مختلف یا بسته بندی کردن آن‌ها می‌شود.

طبق جدول ۲ تفاوت زیادی بین درصد دانش‌آموزانی که در نوشتن رابطه نمادین موفق هستند (۳۲ درصد) و دانش‌آموزانی که در دست‌ورزی با رابطه نوشته شده موفق هستند (۲/۵ درصد)، وجود دارد. توانایی بر دست‌ورزی با شیء، از ویژگی‌های مرحله شیء است که هنوز برای تعداد زیادی از دانش‌آموزان در این سطح، قابل دسترسی نیست. تحقیقات متعددی، نشان داده‌اند که بسیاری از دانش‌آموزان قابلیت‌های جبر را به درستی درک نمی‌کنند و حتی وقتی وادار به استفاده از آن می‌شوند از آن به سطحی‌ترین شکل ممکن استفاده می‌کنند [۳۰].

سؤال دوم: هر یک از مراحل تعمیم الگوهای شکلی با کدام سطح آگاهی از ساختار میسون و همکاران مطابق است و چگونه می‌توان سطح آگاهی را ارتقا داد؟

جدول ۳ تطبیق پنج حالت آگاهی از ساختار میسون و همکاران با مراحل تعمیم الگوهای شکلی از منظر APOS را نشان می‌دهد که می‌تواند به عنوان ابزاری برای ارتقای سطح دانش‌آموزان استفاده شود. در حالت خیره نگاه کردن، دانش‌آموزی که هنوز نتوانسته است تصویری درست برای شکل بعدی الگو ایجاد کند، می‌تواند از او خواست تا به اشکال، دقیق‌تر نگاه کند و زمان بیشتری در نگاهش به الگو صرف نماید، تا بتواند تصویر درستی از الگوی بعدی ایجاد کرده و رسم نماید.

درصد ناموفقیت، زمانی که نیاز بود با رابطه دست‌ورزی کنند، خیلی بیشتر می‌شد. این مطلب، نشان می‌دهد گرچه تعدادی در نوشتن رابطه موفق بوده‌اند؛ اما هنوز درک معناداری از ویژگی‌های الگو ندارند که بتوانند به صورت معناداری با رابطه دست‌ورزی کنند. مکانیسم فشرده‌سازی، منجر به توانایی استفاده از نماد به جای فرآیندهای مختلف یا بسته بندی کردن آن‌ها می‌شود.

طبق جدول ۲ تفاوت زیادی بین درصد دانش‌آموزانی که در نوشتن رابطه نمادین موفق هستند (۳۲ درصد) و دانش‌آموزانی که در دست‌ورزی با رابطه نوشته شده موفق هستند (۲/۵ درصد)، وجود دارد. توانایی بر دست‌ورزی با شیء، از ویژگی‌های مرحله شیء است که هنوز برای تعداد زیادی از دانش‌آموزان در این سطح، قابل دسترسی نیست. تحقیقات متعددی، نشان داده‌اند که بسیاری از دانش‌آموزان قابلیت‌های جبر را به درستی درک نمی‌کنند و حتی وقتی وادار به استفاده از آن می‌شوند از آن به سطحی‌ترین شکل ممکن استفاده می‌کنند [۳۰].

دانش‌آموزانی که متغیر را به صورت فرآیند درک کرده‌اند، اغلب نمی‌توانند یا تمایلی ندارند با متغیر کار کنند [۳۱]. شجاعی، در نتیجه تحقیق خود بیان می‌کند که بسیاری از دانش‌آموزان تعمیم را به درستی تشخیص می‌دهند؛ ولی عدم درک متغیر، تبدیل دانش حسابی به دانش جبری و ارائه یک بازنمایی جبری را غیر ممکن می‌سازد [۳۲]. موفقیت دانش‌آموزان در تعمیم، وابسته به درک آنان از متغیر است و درک متغیر، نیاز به یک تفکر انتزاعی گسترده دارد [۳۳]. طبق تعریف APOS، همچنین از نشانه‌های رسیدن به مرحله شیء این است که دانش‌آموز قادر باشد به فرآیندی که شیء از آن برآمده است برگردد. در الگوهای شکلی، این توانایی به این صورت است که بتواند الگوی شکلی

جدول ۳: تطبیق سطوح APOS و حالت‌های آگاهی از ساختار میسون و همکاران

Table 3: Adapting the APOS theory with the attentional state to structure of Mason and et al.

حالت‌های آگاهی از ساختار Attentional state to structure	نشانه‌ها Identifiers	سطوح APOS Stages of APOS
خیره نگاه کردن Holing wholes	شکل را با همه جزئیات و به‌طور صحیح رسم می‌کند. Drawing correctly the figure with all details	عمل Action
تمییز جزئیات و شناسایی روابط Discerning details and recognizing relationships	ساختار شکل را توضیح می‌دهد. Explaining the figure structurally مراحل را معکوس کرده و به سؤال معکوس پاسخ می‌دهد. Reversing the steps and answer the reverse item تعمیم دور را که نیاز به جهش از روی گام‌ها دارد به درستی انجام می‌دهد. Answering the far generalization item that requires jumping from the steps به‌طور کامل رابطه را می‌نویسد و با آن دست‌ورزی می‌کند تا جواب سؤال معکوس را بیابد.	فرآیند Process
ادراک ویژگی‌ها Perceiving properties	Writing the relation completely and manipulating it to answer the reverse question برای رابطه داده شده، الگوی شکلی ساختارمندی طراحی می‌کند. Designing a structural figural pattern for the given relations	شی Object
استدلال بر مبنای ویژگی‌ها Reasoning on the basis of identified properties	بین الگوهای شکلی مختلف با ساختارهای متفاوت یک یا دو متغیره می‌تواند تمییز قائل شود و نوع رابطه تابعی متناظر را تشخیص داده و دلیل خود را بیان می‌کند. Distinguishing between one- and two-variable figural patterns, type of functional relations of figural patterns reasonably	طرح‌واره Schema

پاسخ دانش آموز S_1 : ابتدا، با دقت به شکل‌ها نگاه می‌کنم. سپس، درباره شکل بعدی کمی تأمل کرده و شکل را می‌کشم. بعد از کشیدن شکل بعدی، الگوی شکلی را به عددی تبدیل می‌کنم و به دنبال رابطه‌ای بین الگوها می‌گردم. البته، بعضی وقت‌ها رابطه در شکل‌ها مخفی شده است و با کمی مشاهده با دقت می‌توان به رابطه الگو پی برد.

S_1 دانش آموزی است که در تکلیف اول و سوم، به سطح شی رسیده است و در زمان طراحی الگو، برای روابط داده شده شکل ساختارمندی را رسم می‌کند و بین اجزای رابطه با شکل، به‌طور معناداری ارتباط برقرار می‌کند. شکل ۱، نشان می‌دهد که در سؤال ۲۵ (پیوست ۲) شکل ساختارمندی برای رابطه داده شده، رسم کرده است. اما در تکلیف دوم و چهارم، هنوز به سطح شی نرسیده است. با این که برای شکل داده شده رابطه درستی نوشته است؛ ولی زمانی که از او خواسته شد برای رابطه داده شده، شکل رسم کند قادر نبود شکل ساختارمندی را رسم کند و صرفاً با استخراج اعداد از رابطه و کشیدن شکل‌های نامنظم به همان تعداد، الگو را رسم کرد. برای ارتقای سطح دانش آموز S_1 به مرحله شیء در تکالیف دوم و چهارم، به او کمک می‌کنیم تا ویژگی‌های الگوهای شکلی را درک کند؛ توجه او را به وجود اختلاف اول ثابت یا اختلاف دوم ثابت جلب می‌کنیم تا از این طریق ویژگی درجه اول بودن یا درجه دوم بودن الگوی شکلی را درک کند. همچنین، در مورد یک‌متغیره و دو‌متغیره بودن الگوی شکلی به او تذکر می‌دهیم که اگر تغییرات از یک شکل به شکل دیگر با یک متغیر قابل نشان دادن بود، الگو یک متغیره و اگر با دو متغیر قابل بیان کردن بود، دو متغیره است. دانش آموز S_1 با درک ویژگی‌های اشکال قادر بود در سؤالات بعدی برای رابطه داده شده الگوی شکلی رسم کند که نشانه رسیدن وی به سطح شیء بود.

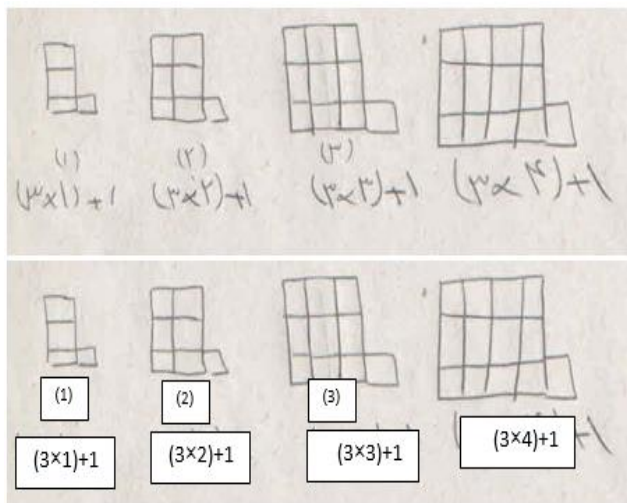
رسم دقیق الگوی بعدی، به این معنی نیست که او ساختار الگو را هم درک کرده است؛ بلکه تنها ممکن است تصویری درست در ذهنش شکل گرفته و روی برگه به درستی منتقل کرده باشد. در حالت تمییز جزئیات، دانش آموزی که هنوز نمی‌تواند توضیحی ساختارمند از نحوه کشیدن شکل، ارائه دهد می‌توان به او تذکر داد که ببیند هر بار چه قسمتی از شکل ثابت مانده و چه قسمت‌هایی تغییر کرده است. در حالت شناسایی روابط، اگر دانش آموز هنوز قادر نیست روابط پنهان موجود در الگو را ببیند، می‌توان از او خواست ارتباط تغییرات را با اطلاعات موجود از جمله شماره اشکال بررسی کرده و روابط درونی اشکال را بیابد. در حالت ادراک ویژگی‌ها، دانش آموزانی که هنوز به مرحله درک ویژگی‌های شکل نرسیده‌اند می‌توان توجه آن‌ها را به وجود اختلاف اول ثابت یا اختلاف دوم ثابت جلب کرد که ویژگی درجه اول بودن یا درجه دوم بودن را نشان می‌دهد. اگر اختلاف‌ها با یک متغیر قابل نشان دادن بودند الگو یک‌متغیره و گرنه دو‌متغیره است. با درک این ویژگی‌ها می‌تواند رفتار الگوها را فشرده‌سازی کرده و به‌صورت رابطه نمادین نشان دهد. در حالت استدلال بر مبنای ویژگی‌ها، اگر دانش آموزی به این حالت از توجه نرسیده باشد می‌توان از وی خواست تا یک دسته‌بندی بر مبنای ویژگی‌ها انجام داده و سپس بر مبنای آن‌ها، توضیح دهد که الگوی مورد نظر متعلق به کدام دسته هست و چرا؟ و اگر نیست به چه دلیل نیست لازم است الگویی از انواع مختلف خطی و غیرخطی، یک‌متغیره و دو‌متغیره طراحی کنند و به صورت مستدل به ویژگی‌های آن‌ها اشاره کنند.

در این بخش، چند نمونه مصاحبه با دانش آموزان (S_1, S_2) و ارتقای سطح آن‌ها بیان می‌شود:

محقق: وقتی با چنین تکالیفی (اشاره به تکلیف ۱- پیوست ۱) روبه‌رو می‌شوی برای پاسخ به سؤالات چه می‌کنی؟

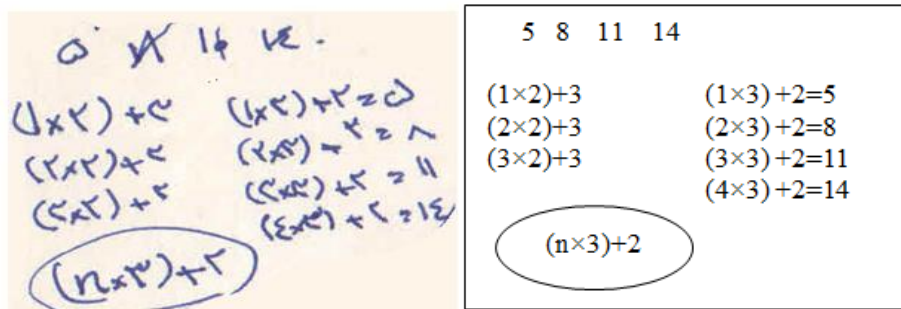
جمع بندی و نتیجه گیری

تعمیم الگوهای شکلی ظرفیتی بی نظیر برای قرار دادن دانش آموزان در مسیر تفکر تابعی دارند [۵] و [۱۰]. در سال های اخیر، با شناخت ارزش و اهمیت الگوها، در توسعه تفکر جبری، آموزش الگوهای شکلی وارد برنامه درسی شده است [۳۴-۳۵]. تفکر تابعی، شاهراه ورود به حوزه مشکلات استدلال جبری دانش آموزان است [۵]. پرداختن به انواع توابع، تابع خطی، دوخطی، یک متغیره و دومتغیره از طریق تعمیم الگوهای شکلی که زمینه ای آشنا و جذاب برای دانش آموزان هست، می تواند دانش آموزان را به مقصد درک و فهم جبری برساند. در این تحقیق، در مرحله اول طبق مشخصه هایی که چو [۲۳] برای الگوها مطرح کرده بود، تعداد متغیر و خطی و غیرخطی بودن، و نیز مطالعه سطوح APOS، سؤالاتی طراحی و توسط نمونه آماری پاسخ داده شد. در آخر، تعداد ۱۹ دانش آموز در مصاحبه های نیمه ساختاریافته شرکت کردند تا سطوح آن ها به صورت دقیق تر شناسایی و ارتقا داده شود؛ رپورا، حاصل بیست سال مطالعات خود در مورد تعمیم الگوها را در یک مدل سامان داده و جنبه های تأثیرگذار بر تعمیم الگوها را برشمرده است. یکی از این جنبه ها، آگاهی یا توجه به ساختار است [۹]. میسون و همکاران، به پنج حالت آگاهی از ساختار پرداخته اند [۱۳] که در این تحقیق حالت های آگاهی از ساختار بر سطوح عمل- فرآیندی-ء- طرحواره تطبیق داده شده و از هر کدام از آن ها به منزله ابزاری برای ارتقای سطح دانش آموزان از عمل به فرآیند و از فرآیند به شیء و از شیء به طرحواره، استفاده شده است. سطح عمل با حالت خیره نگاه کردن، تطبیق داده شده و خود خیره نگاه کردن به عنوان ابزاری برای رسیدن دانش آموز به سطح عمل، استفاده شده است. سطح فرآیند، با مرحله تمییز جزئیات و شناسایی روابط، سطح شیء با ادراک ویژگی ها و سطح طرحواره با استدلال بر مبنای ویژگی ها تطبیق داده شده است. این تحقیق، چهارچوبی برای سنجش و ارزیابی دانش آموزان در تعمیم الگوهای شکلی فراهم نموده است که معلمان می توانند از آن، در آموزش بهتر این مفهوم استفاده نمایند. در هر مرحله، می توان راهکارهایی متناسب با سطح دانش آموز ارائه داد تا درک او از تعمیم، به سطوح بالاتر، ارتقا یابد. این تحقیق، قدرت نظریه APOS را در سازگاری با سایر نظریه های ساخت و سازگرا از جمله نظریه آگاهی از ساختار را نشان می دهد.



شکل ۱: پاسخ دانش آموز S₁ به سؤال ۲۵ (پیوست ۲)
Fig. 1: The answer of S₁ to task25 (Appendix 2)

پاسخ دانش آموز S₂: ابتدا، شکل های موجود را می شماریم و تعداد را کنار هم می گذاریم و تعداد اضافه شده ها را می نویسیم و بعد در n در x (یعنی عددی ضرب در n) را می نویسیم. مضرب های n را از اول (۱ و ۲ و ...) امتحان می کنیم تا یکی درست دربیاید. S₂ دانش آموزی است که در هیچ تکلیفی، به مرحله فرآیند نرسیده است. به ساختار شکل ها توجهی ندارد و با حدس و آزمایش، اعداد استخراج شده از الگوی شکلی را تجزیه می کند تا به یک رابطه که در همه الگوها صدق می کند، برسد. شکل ۲، نشان می دهد که در تکلیف ۱ (پیوست ۱) با این که به رابطه عددی درست می رسد؛ ولی درک او از آن رابطه، به مرحله فرآیند نرسیده است و نمی تواند، ساختار شکل را توضیح دهد. برای ارتقای سطح وی، توجه او را به این که هر بار چه قسمتی از شکل ثابت مانده و چه قسمتی تغییر کرده است، جلب کردیم تا بتواند جزئیات اشکال را ببیند و از هم تمییز دهد و بین شماره شکل و خود شکل رابطه برقرار کند که در نتیجه قادر به شناسایی رابطه شد و توانست با موفقیت به مرحله فرآیند برسد.



شکل ۲: پاسخ دانش آموز S₂ به تکلیف ۱
Fig. 2: The answer of S₂ to task 1

[8] Somasundrum P., Akmar S., & Eu L. Pattern Generalisation by Year Five Pupils. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 2019; 14(2): 353–362.

[9] Rivera F. *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Springer Science & Business Media. 2013.

[10] Markworth K. *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns* [dissertation]. University of north Carolina, Chapel Hill. 2010.

[11] Watson A., Mason J. Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-making. *Mathematics thinking and learning*. 2006; 8(2): 91–111.

[12] Papic M, Mulligan J, Mitchelmore M. Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2009; 42 (3): 237–268.

[13] Mason J, Stephens M, Watson A. Appreciating mathematical structures for all. *Mathematics Education Research Journal*. 2009; 21 (2): 10–32.

[14] Dubinsky E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. 1991;95–123. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

[15] Sfard A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 1991; 22: 1–36.

[16] Gray E, Tall D. O. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1994; 26:115–141.

[17] Huntzinger E.M. Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics*. Reston, VA: NCTM. 2008. P. 279-293.

[18] Smith E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. *Algebra in the elementary grade*. 2008; 133-163.

[19] Asghari N. [Developing a model to enhance elementary teachers, ability to foster functional thinking and algebraic reasoning in elementary students]. *Journal of the theory and practice in curriculum*. 2014; 2(3); 141-162. [In Persian].

[20] Oktaç A. What's new with APOS theory? A look into levels and Totality. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*. 2022; 21(1): 9-21. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4245>.

[21] Arnon I, Cottrill J, Dubinsky E, Oktaç A, RoaFuentes S, Trigueros M, Weller K. *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in the mathematics education*. New York: Springer-Verlag. 2014.

مشارکت نویسندگان

نویسنده اول در بخش نظری، جمع‌آوری داده‌ها و تحلیل داده‌ها (۳۵٪)، نویسنده دوم در بخش نظری، تحلیل داده‌ها و اصلاح نسخه اولیه (۳۵٪)، نویسنده سوم در بخش نظری و اصلاح نسخه اولیه (۲۰٪) و نویسنده چهارم در بخش جمع‌آوری داده‌ها و اصلاح نسخه اولیه (۱۰٪) مشارکت داشته‌اند.

تشکر و قدردانی

این مقاله، مستخرج از رساله دکتری آموزش ریاضی است. نویسندگان این مقاله از همکاری اداره آموزش و پرورش شهرستان ملکان و همچنین از مدیر خانه ریاضیات ملکان در هموار نمودن مسیر جمع‌آوری داده‌ها، تقدیر و تشکر می‌کنند.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان این مقاله معرفی نشده است.»

منابع و مأخذ

[1] Gripton c. Pattern in early years mathematics curriculum: a 25-year review of the status, positioning and conception of pattern in England. *Research in mathematics education*. 2023; 25(1): 3–23. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.2010237>.

[2] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2019). *Executive Summary, Principles and Standards for School Mathematics*.

[3] English L.D, Warren E.A. [Introducing the variable through pattern exploration], in: Gholam Azad S., (Ed.), *Roshd mathematics Education Journal*. 1999; 54(1): 54-60. [In Persian].

[4] Kaput J. J. What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, *Algebra in the Early Grades*. 2008; 5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

[5] Blanton M.L., Kaput J.J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *ZDM- international Reviews on mathematical education*, 2011; 37(1): 34-42.

[6] Carraher D. W., Schliemann A. D. *Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. Infancia y Aprendizaje*, 2019; 42(3): 479-522.

[7] Frey K., Sproesser U., Veldhuis M. What is functional thinking? Theoretical considerations and first results of an international interview study. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. 2022 Feb 22-26: Bozen-Bolzano, Italy.

[35] Khosroshahi Gh.L. *Algebraization for Pre-schoolers with a focus on Associativity*. [dissertation]. shahid beheshti university, Tehran; 2016.

معرفی نویسندگان

AUTHOR(S) BIOSKETCHES



ربابه افخمی بنام دکتري آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی می‌باشند. ایشان مقطع کارشناسی را در دانشگاه امیرکبیر تهران در رشته ریاضی کاربردی و مقطع ارشد را در دانشگاه فردوسی مشهد در رشته آموزش

ریاضی گذرانده است. حوزه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان سواد ریاضی، آموزش ابتدایی و تفکر جبری است. ایشان در سیزدهمین کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی در هامبورگ آلمان، به عنوان سخنران مدعو دعوت شدند.

Afkhami, R., PhD Student, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran

✉ r_afkhami@yahoo.com



نسیم اصغری دکتري آموزش ریاضی، و عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی می‌باشند. ایشان کارشناسی ریاضی را در دانشگاه تبریز و کارشناسی ارشد را در دانشگاه‌های فردوسی مشهد و سپس واحد علوم و تحقیقات تهران در رشته آموزش ریاضی

گذرانده‌اند. ایشان فارغ‌التحصیل رتبه اول اولین دوره دکتري رشته آموزش ریاضی از علوم و تحقیقات تهران هستند. علایق پژوهشی ایشان تفکر جبری، مدل‌سازی ریاضی، یاددهی و یادگیری ریاضی، آموزش و توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی است.

Asghary, N. Instructor, Mathematics Education, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran

✉ Nas.Asghari@iauctb.ac.ir



علیرضا مدقالچی عضو هیأت علمی دانشگاه خوارزمی تهران می‌باشند. ایشان در سال ۱۳۵۲ مدرک کارشناسی ریاضی محض خود را از دانشگاه تبریز دریافت کرد و پس از گذراندن یک دوره دو ساله مدرسی ریاضیات در دانشگاه خوارزمی (مؤسسه ریاضیات) دوره کارشناسی ارشد و دکتري

خود را در دانشگاه شفیلد انگلستان در شاخه آنالیز ریاضی سپری کرد و در سال ۱۳۶۱ مدرک دکتري خود را دریافت نمود.

[22] Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2000; 31: 557-578.

[23] Chua, B. L. Features of generalising task: Help or hurdle to expressing generality? *Australian Mathematics Teacher*. 2009; 65(2): 18-24.

[24] Afkhami R, Asghary N, Medgalchi A. [Enhancing functional thinking: Identifying the prior schemas of seventh grade students in generalization of two-variable figural patterns]. *Tech. Edu. J.* 2020; 14(3): 707-722. [In Persian]. <https://doi.org/10.22061/jte.2019.4844.2127>

[25] Cooper J.T, Warren E. *The effect of different representations on Years 3 to 5 student's ability to generalization*. *ZDM mathematics Education*. 2008; 40: 23-37.

[26] Reyhani, E., & Sedighi, M. Investigating the performance of first year high school students in solving algebraic generalization problems. *Technology of Education Journal (TEJ)*. 2013; 7(2): 103-118. doi: 10.22061/tej.2013.330.

[27] Lanin J.K. Generalization and Justification: The challenge of introducing Algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*. 2005; 7: 231-258.

[28] Ayalon M., & Wilkie K. Students' identification and expression of relations between variables in linear functions tasks in three curriculum contexts. *Mathematical Thinking and Learning*. 2020; 22(1): 1-22. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1619221>

[29] Permatasari D., Azka R, Fikriya H.O. Exploring students' algebraic thinking in generational activities and their difficulties. *Jurnal Tadris Matematika*. 2021; 14(1): 53-68. <https://doi.org/10.20414/betajtm.v14i1.418>.

[30] Stacey K, Asghari A.H. [Passing from arithmetic thinking to algebraic thinking]. *Roshd mathematics Education Journal*. 2009; 26(3): 4-11. [In Persian].

[31] Li X. *Cognitive analysis of student errors and misconceptions in variables, equations and functions*. [dissertation]. Texas A&M University. 2006.

[32] Shojaie k. *The investigation of ability of the nine grade students' generalization and justification in numeric and geometric number patterns*. [master thesis]. Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran; 2013. [In Persian].

[33] Fujii T. *Probing students understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand?* Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA. 2003; 1: 49-65.

[34] Asghary N, Shahvarani A, Medgalchi A. R. Significant Process of Change for Elementary Teachers to Foster Functional Thinking. *Mathematics Education. Bulletin-BOLEMA, Brazil*. 2013; 7:121-145.



را در سال ۱۳۹۱ در دانشگاه تربیت مدرس تهران درگرایش هندسه به پایان رساندند.

Pashaie, F. Academic member, Pure Mathematics, Maragheh University, Maragheh, Iran

✉ f_pashaei@maragheh.ac.ir

Medghalchi, A. Professor, Pure Mathematics, Kharazmi University, Tehran, Iran

✉ a_medghalchi@khu.ac.ir

فیروز پاشائی عضو هیأت علمی دانشگاه مراغه می‌باشند. ایشان مدرک دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد خود را در رشته ریاضی محض و در گرایش هندسه از دانشگاه تبریز دریافت کردند. سپس دوره دکتری خود

Citation (Vancouver): AfKhami Banaem R, Asghary N, Medghalchi A, Pashaie F. [Improving the mental constructs of seventh grade students in figural pattern generalization: Using APOS theory and structural awareness]. *Tech. Edu. J.* 2024; 18(2): 387-398

 <https://doi.org/10.22061/tej.2023.9986.2924>

