



ORIGINAL RESEARCH PAPER

The investigation of students' mistakes in simplifying algebraic expressions, and finding the source of these mistakes from the viewpoint of math teachers

N. Faramarzpoor, M.R. Fadaee*

Department of Mathematics Education, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University Kerman, Kerman, Iran

ABSTRACT

Received: 2 April 2020
 Reviewed: 21 May 2020
 Revised: 22 July 2020
 Accepted: 4 August 2020

KEYWORDS:

Algebraic Mistakes
 Simplifying Algebraic Expressions
 Middle School
 Teachers

* Corresponding author

mr_fadaii@mail.uk.ac.ir

☎ (+98913) 1404417

Background and Objectives: Mathematics is one major subject matter in the curriculum of all majors. One of the concerns of educators and math teachers is that middle school mathematics students have many problems when they are faced with algebraic topics. In Iran, all students need to study algebra and teachers must help them build a deep and lasting understanding and skills for high-school math. Hence, an important goal for teachers is to be aware of the mistakes in order to help students to understand concepts and procedures correctly. However, unfortunately, some teachers do not have enough knowledge to identify and correct the existing mistakes and their origin. Therefore, recognizing mistakes and their origins and informing teachers about these mistakes may help students succeed in learning algebra. Thus, the purpose of this research was to investigate the students' mistakes in simplifying the algebraic expressions and finding the origin of making such mistakes from the mathematics teachers' viewpoint.

Methods: This research is an applied research and due to its purpose it is considered to be a qualitative research. The research sample included 14 math teachers of the middle school of Kerman Province with teaching experience between 12 to 29 years who were selected by the purposeful sampling method, as teachers who had experience in teaching algebra in middle schools had to be selected. To collect the data, first a test about simplifying algebraic expressions for eighth-grade students and extracting erroneous cases was designed through a semi-structured interview with math teachers. The qualitative content analysis method was used for data analysis.

Findings: The findings of this research showed that from the viewpoint of math teachers, 22 types of mistakes were made by students of middle school when simplifying algebraic expressions including exponentiation, positive and negative sign, addition, subtraction, multiplication of integers, conjoining, a variable related operating, use of brackets, similar terms, and the order of operations. The findings also showed that teachers believe that the causes of students' mistakes in simplifying algebraic expressions are as follows: lack of understanding, misunderstanding or incomplete understanding of concepts such as variables, exponent, brackets, and similar terms; ignoring of algebraic symbols; students' self-made rules in dealing with exponent and brackets; interference of previously learned algebraic concepts with current learning and vice versa; and incorrect calculation of addition, subtraction, and multiplication of integers.

Conclusion: Today, students are no longer isolated in a desert where math teachers are the basis of knowledge, but rather floating in an ocean of information. However, teachers are still needed to help them understand algebra in a meaningful way. In algebra, the concepts are formed hierarchically and the learning of each concept depends on the students' understanding of the prerequisite concepts. Therefore, if teachers who teach algebra are fully aware of the reasons for students' mistakes, they attempt to make the prerequisite concepts understandable to the students correctly, and without any misunderstandings and errors. This helps students to make fewer mistakes in solving algebraic problems, increase their self-confidence, and ultimately, perform better.



NUMBER OF REFERENCES

44



NUMBER OF FIGURES

1



NUMBER OF TABLES

0

مقاله پژوهشی

بررسی اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارتهای جبری و یافتن منشا این اشتباهات از دیدگاه معلمان ریاضی

نوشین فرامرزیور، محمدرضا فدایی*

گروه آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

پیشینه و اهداف: ریاضی یکی از دروسی است که در برنامه درسی برای همه دانش‌آموزان در نظر گرفته شده است. یکی از نگرانی‌های متخصصین آموزشی و معلمان ریاضی این است که چرا دانش‌آموزان در دوره اول متوسطه با روبه رو شدن با مباحث جبری در ریاضی دچار افت تحصیلی می‌شوند. این در حالی است که در ایران همه دانش‌آموزان باید جبر را یاد بگیرند، و معلمان باید به دانش‌آموزان کمک کنند تا در ذهن خود یک فهم عمیق و ماندگار از جبر برای کار کردن همراه با مهارت بیشتر در پایه‌های متوسطه و دبیرستان بسازند. از اینرو یک هدف مهم برای معلمان این است که با آگاهی در مورد اشتباهات به دانش‌آموزان کمک کنند تا مفاهیم و رویه‌ها را درست درک کنند. اما متأسفانه بعضی از معلمان فاقد دانش کافی در مورد تشخیص و رفع اشتباهات موجود و منشا آن‌ها هستند. پس شاید پیدا کردن و دانستن اینکه اکثر دانش‌آموزان چه بدفهمی‌هایی دارند و شناخت اشتباهات و دلایل ایجاد آن‌ها و آگاه کردن معلمان از این اشتباهات بتواند به دانش‌آموزان کمک کند که در یادگیری جبر موفق باشند. از اینرو پژوهش حاضر با هدف بررسی اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارتهای جبری، و یافتن منشا این اشتباهات از دیدگاه معلمان ریاضی انجام شده است.

روش‌ها: این پژوهش در زمره پژوهش‌های کاربردی می‌باشد و با توجه به هدف آن از نوع پژوهش‌های کیفی است. نمونه پژوهش شامل ۱۴ نفر از معلمان ریاضی دوره اول متوسطه استان کرمان با سابقه تدریس بین ۱۲ تا ۲۹ سال است که با بهره‌گیری از روش نمونه‌گیری هدفمند انتخاب شدند. زیرا باید افرادی انتخاب می‌شدند که تجربه تدریس مبحث جبر در دوره اول متوسطه را داشتند. برای جمع‌آوری داده‌ها ابتدا با طرح یک آزمون از مبحث ساده کردن عبارتهای جبری برای دانش‌آموزان پایه هشتم دوره اول متوسطه و استخراج موارد اشتباه، از طریق مصاحبه نیم‌ساختاریافته با معلمان ریاضی خواهان آن شدیم که پس از تشخیص نوع اشتباه دلایل رخ داد این اشتباهات را بیان کنند. تحلیل داده‌ها با استفاده از روش تحلیل محتوای کیفی انجام شده است.

یافته‌ها: در این پژوهش از دیدگاه معلمان، دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارتهای جبری مرتکب ۲۲ نوع اشتباه در ارتباط با توان، علامت مثبت و منفی، جمع، تفریق و ضرب اعداد صحیح؛ وصل کردن، اعمال مربوط به متغیر، باز کردن پرانتز، جملات متشابه و رعایت ترتیب عملیات می‌شوند. همچنین یافته‌ها نشان دادند که معلمان معتقدند عدم درک، درک اشتباه و یا درک ناقص مفاهیمی چون متغیر، توان، پرانتز و جملات متشابه؛ نادیده گرفتن علائم و نمادهای جبری؛ قوانین خودساخته دانش‌آموز در برخورد با توان و پرانتز؛ دخالت مفاهیم جبری یادگرفته شده قبلی در یادگیری‌های جدید و بالعکس؛ محاسبه نادرست جمع، تفریق و ضرب اعداد صحیح سبب ایجاد اشتباهات دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارتهای جبری می‌شوند.

نتیجه‌گیری: امروزه دانش‌آموز در یک وادی بزهت نیست که به دنبال دانش بگردد، او در اقیانوسی از اطلاعات شناور است و معلم ریاضی هم دیگر برکه آبی در بیابان به شمار نمی‌رود، او نیز مسافری در همان قایق دانش‌آموزان است که باید به آنان کمک کند تا جبر را معنادار یاد بگیرند. از آنجا که در جبر مفاهیم به صورت سلسله مراتبی شکل گرفته است و یادگیری هر مفهوم به فهم و درک دانش‌آموزان از مفاهیم پیش‌نیاز بستگی دارد، لذا زمانیکه معلمان در کلاس جبر با آگاهی کامل نسبت به دلایل ایجاد اشتباهات دانش‌آموزان حاضر شوند، تلاش می‌کنند که مفاهیم پیش‌نیاز، به درستی و بدون شکل‌گیری بدفهمی‌ها و رخ دادن خطاها توسط دانش‌آموزان کسب شوند. این کار خود باعث می‌شود دانش‌آموزان در حل مسائل جبری کمتر اشتباه کنند، اعتماد به نفس آنها بالاتر رود و در نهایت عملکرد بهتری داشته باشند.

تاریخ دریافت: ۱۴ فروردین ۱۳۹۹

تاریخ داوری: ۱ خرداد ۱۳۹۹

تاریخ اصلاح: ۱ مرداد ۱۳۹۹

تاریخ پذیرش: ۱۴ مرداد ۱۳۹۹

واژگان کلیدی:

اشتباهات جبری

ساده کردن عبارتهای جبری

دوره اول متوسطه

معلمان

* نویسنده مسئول

mr_fadaii@mail.uk.ac.ir

0913-1404417

مقدمه

رویه‌ها را درست درک کنند. اما متأسفانه بعضی از معلمان فاقد دانش کافی در مورد تشخیص و رفع اشتباهات موجود و منشا آن‌ها هستند. پس شاید شناخت این اشتباهات و پیدا کردن دلایل ایجاد آن‌ها و آگاه کردن معلمان از آن‌ها بتواند به دانش‌آموزان کمک کند که بر اشتباهاتشان چیره شوند، زیرا دانش در مورد منشا اشتباهات می‌تواند در انتخاب تکنیک‌های آموزشی موثر مفید باشد [۷] و از طرفی پیدا کردن و دانستن اینکه اکثر دانش‌آموزان چه بدفهمی‌هایی دارند راهگشای بسیاری از مشکلات می‌باشد. Bennett [۸] معتقد است که کشف و تحلیل اشتباهات با آنچه که دانش‌آموزان در مورد جبر می‌دانند و می‌فهمند، در ارتباط است. از این‌رو با توجه به مطالب بیان شده، مقاله حاضر روی سؤالات زیر متمرکز شده است تا با پیدا کردن پاسخی برای آن‌ها بتواند گامی در جهت بهبود یادگیری مباحث درس جبر توسط دانش‌آموزان بردارد:

۱. از دیدگاه معلمان، دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارت‌های جبری مرتکب چه اشتباهاتی می‌شوند؟
 ۲. از دیدگاه معلمان دلایل ایجاد اشتباهات دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارت‌های جبری چیست؟
 ۳. از دیدگاه معلمان دلایل ایجاد اشتباهات دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارت‌های جبری چیست؟
- با توجه به اینکه منظور از عبارت جبری یک چندجمله‌ای جبری است که شامل اعداد، متغیرها و عملیات می‌شود، در اینجا ابتدا تحقیقات انجام شده در زمینه اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد متغیر، جمع، تفریق و ضرب اعداد صحیح و عبارت‌های جبری و ساده کردن آن‌ها بیان می‌شود و سپس تحقیقات انجام شده در مورد دلایل ایجاد بدفهمی‌ها و اشتباهات دانش‌آموزان ذکر می‌گردد.

اشتباهات و بدفهمی‌های مربوط به متغیر

یافته‌های موجود نشان می‌دهند که اکثریت دانش‌آموزان معتقدند متغیر نشانگر یک عدد تنها و منفرد است [۹] و برخی از دانش‌آموزان متغیرها را نسبت به اینکه اعداد یا نمادهای مختصر بدانند به عنوان برجسته یا مجهول در نظر می‌گیرند [۱۰]. Kuchemann [۱۱] یکی از محققان پیشکسوت در این زمینه است که به تحلیل فهم ۱۰۰ دانش‌آموز ۱۴ ساله در مورد معانی حروف پرداخت. او از دانش‌آموزان خواست تا بگویند که عبارت $L + N + M = L + P + N$ در چه مواقعی درست است (همیشه، هرگز یا گاهی اوقات). وی دریافت که نیمی از دانش‌آموزان گزینه هرگز را انتخاب می‌کنند. این پاسخ نشانه این بدفهمی است که حروف متفاوت به معنای اعداد متفاوت هستند [۱۲]. در یک مطالعه مشابه، Asquith and et al. [۱۳] آشکار کردند که بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستانی فهم درستی از متغیرها نداشتند. برای مثال، آنها فکر می‌کردند که دو حرف n و w در دو معادله $97n + 22 = 10$ و $7w + 22 = 109$ دو عدد متفاوت را نمایش می‌دهند. از دیدگاه دانش‌آموزان مطابق ترتیب حروف الفبا، n نسبت به w عدد کوچکتری را نمایش می‌داد.

یکی از مهمترین اهداف آموزش ریاضی در رابطه با ریاضیات مدرسه‌ای، یادگیری جبر توسط دانش‌آموزان است، زیرا مهارت‌های تفکر تحلیلی و قدرت استدلال و اثبات یادگیرندگان را افزایش می‌دهد و یادگیری آن لازمه فهمیدن ریاضیات دبیرستان می‌باشد [۱]. از جمله مباحث جبری که در یادگیری مباحث دبیرستان نقش کلیدی ایفا می‌کند، مبحث ساده کردن عبارت‌های جبری است که یکی از مهمترین مباحث کتاب‌های ریاضی دوره اول متوسطه به حساب می‌آید. به طوریکه هدف فصل جبر در کتاب ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه، یاد دادن مبحث ساده کردن عبارت‌های جبری است؛ در کتاب ریاضی پایه هشتم این مبحث تحت عنوان جداگانه مطرح شده و در پایه نهم یادگیری معادله به یادگیری این مبحث نیاز دارد. بنابراین زمانیکه دانش‌آموزان ساده کردن عبارت‌های جبری را یاد بگیرند، در سال‌های بالاتر در حل معادله و دستگاه معادلات هم پیشرفت خواهند کرد زیرا ساده کردن عبارت‌های جبری پیش‌نیاز مطالب در تمامی دوره‌های تحصیلی می‌باشد [۲]. همگی این بحث‌ها نشان دهنده اهمیت یادگیری مبحث ساده کردن عبارت‌های جبری است.

۱. Guler and Celic [۳] بیان می‌کنند که توسعه مهارت‌های دانش‌آموزان در زمینه ساده کردن عبارت‌های جبری، معلمان را با چالش‌های جدی روبه‌رو کرده است. نویسنده اول، خود معلم ریاضی در دوره اول متوسطه می‌باشد و طی ۱۱ سال سابقه کاری و تعامل با همکاران، شاهد این بوده است که علی‌رغم تلاش‌های زیاد معلمان، هنوز هم دانش‌آموزان در ساده کردن عبارت‌های جبری عملکرد ضعیفی دارند. در مورد دلیل این عملکرد ضعیف دانش‌آموزان، آموزشگران ریاضی معتقدند وقتی دانش‌آموزان از حساب به جبر گذر می‌کنند دچار اشتباهات زیادی می‌شوند که برخی از این اشتباهات سهوی نیستند، بلکه ناشی از فهم نادرست یا ناقص دانش‌آموزان می‌باشند و در ذهن آنها ماندگار خواهند بود [۵-۴]. البته در این نوشته منظور از اشتباهات، خطاها و بدفهمی‌ها می‌باشد. این اشتباهات یکی از علت‌های عدم یادگیری و درک عمیق مباحث به حساب می‌آیند و موفقیت دانش‌آموزان در حل مسائل را متاثر می‌کنند و مانع یادگیری آنها می‌شوند [۶].

شاید یکی از مهمترین دلایل رخ دادن این اشتباهات توسط دانش‌آموزان در مبحث ساده کردن عبارت‌های جبری، این است که معلمان ریاضی به این اشتباهات و منشا آنها توجهی ندارند [۳]. زیرا گاهی اوقات معلم با وجود تشخیص اشتباه، بخاطر ندانستن دلیل ایجاد آن، نمی‌تواند به دانش‌آموز کمک کند و بدین ترتیب دانش‌آموز که گمان می‌کند مطلب را به درستی یاد گرفته است، متوجه اشتباه و بدفهمی خود نمی‌شود. از آنجا که معلم برای دانش‌آموزان در کلاس درس یک نقش حیاتی را ایفا می‌کند، لذا وی باید اشتباهاتی را که دانش‌آموزان ممکن است مرتکب شوند را از قبل بداند. در واقع یک هدف مهم برای معلمان این است که با آگاهی در مورد اشتباهات به دانش‌آموزان کمک کنند تا مفاهیم و

اغلب عبارت‌های را نادرست ساده می‌کنند، برای مثال: $2 + 5x$ را به صورت $7x$ می‌نویسند. بدفهمی رایج دیگر که Capraro and Joffrion [۲۲] به آن اشاره کردند، وقتی رخ می‌دهد که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود یک عبارت که شامل عمل تفریق است را ساده کنند. بر مبنای تجربه‌های نویسنده اول مشکل دیگر دانش‌آموزان نوشتن عبارت جبری برای مسائل کلامی می‌باشد. برای مثال دانش‌آموزان اغلب «چهارتا کمتر از یک عدد» را به صورت $4 - n$ می‌نویسند که نادرست است و عبارت درست $n - 4$ می‌باشد.

Davis and Krajcik [۲۳] دریافتند که بدفهمی‌ها در مورد علامت تساوی موجب ایجاد خطاهایی در ساده کردن عبارت‌های جبری توسط دانش‌آموزان می‌شود. با توجه به اینکه حروف عبارت‌های جبری را می‌سازند، یعنی یک یا ترکیبی از حروف (متغیر) می‌تواند در یک عبارت جبری استفاده شود، ساده کردن یک عبارت جبری به معنای بدست آوردن یک عبارت جبری هم‌ارز ساده‌تر و کوتاه‌تر نسبت به عبارت اصلی می‌باشد [۲۴]. این مهم است که دانش‌آموزان درک کنند که سوال و جواب عبارت جبری هر دو می‌توانند دارای متغیر باشند و اینکه حرف موجود در جواب یک عبارت جبری یک عدد تعمیم یافته است یعنی حرف می‌تواند هر عددی باشد [۲۵]. کی‌یرن [۲۰]، مشاهده کرد که خیلی از افراد به سختی یک حرف را به صورت یک عدد تعمیم یافته می‌بینند و این ممکن است بخاطر این باشد که حرف در جواب معادله تنها یک عدد خاص می‌باشد. در یک تحقیق در مالزی که فراوانی اشتباهات دانش‌جومعلم‌ان هنگام ساده کردن عبارت‌های جبری محاسبه می‌شد، مشاهده گردید که خطای ترتیب عملیات و علامت منفی بیشترین فراوانی را در میان خطاها دارند [۲۶]. Booth and et al. [۴] شش دسته اشتباه را در هنگام حل مسائل جبر توسط دانش‌آموزان تشخیص دادند که عبارتند از: بدفهمی در مورد مفهوم متغیر، کاربرد نادرست علامت منفی، حل اشتباه معادله و نامعادله، کاربرد نادرست ویژگی‌ها از قبیل قانون جابه‌جایی، کسرها و رعایت نکردن ترتیب عملیات.

Reyes [۲۷] طی تحقیقات خود روی عملکرد دانش‌آموزان در عبارت‌های جبری به این نتیجه رسید که اشتباه رایج اکثر دانش‌آموزان در ساده کردن این است که عبارت جبری را مساوی صفر قرار می‌دهند. به عبارتی دانش‌آموزان عبارت‌های جبری را ناقص می‌دانند و تمایل دارند که آنها را مساوی با مقداری قرار دهند [۲۸]. برای مثال دانش‌آموزان نمی‌توانند عبارت $x + 3$ را به عنوان حل یک مسئله بپذیرند، از این‌رو آنها به صورت زیر عمل می‌کنند؛

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3 \ \& \ x = -2$
این اشتباه ممکن است بخاطر فقدان فهم در مورد تفاوت بین عبارت جبری و معادله ایجاد شود. جوپری و همکاران [۲۹] یکی از اشتباهات دانش‌آموزان در جبر مقدماتی را عدم درک مفهوم عبارت‌های جبری بیان کردند.

اشتباهات دیگری که توسط دانش‌آموزان در ساده کردن عبارت‌های جبری رخ می‌دهند عبارتند از:

در یک مطالعه توسط Nyman and Kilhamn [۱۴]، هنگام معرفی متغیرها در پایه ششم، موارد زیر در مورد نقش متغیر (حروف) بیان شدند:

○ $5 = 2 + x$ ، معادله با یک مجهول: x نمایشگر یک عدد خاص مجهول است.

○ $x + 2$ ، عبارت جبری است که در آن هر عدد صحیحی می‌توانند جایگزین x شوند.

○ $y = 2 + x$ ، این فرمول رابطه بین دو یا تعداد بیشتری متغیر را توصیف می‌کند: در اینجا مقدار y وابسته به مقدار x است.

امینی فر و همکاران [۱۵] اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان پایه اول دوره دوم متوسطه در رابطه با مفهوم متغیر شناسایی و به صورت زیر دسته‌بندی کردند:

- در نظر گرفتن متغیر به عنوان برچسپ یا مخفف نام اشیا؛
- در نظر گرفتن متغیر به عنوان یک عدد خاص؛
- تعیین مقدار متغیر با توجه به علامت آن؛
- در نظر گرفتن جملات نامتشابه به عنوان جملات متشابه؛
- مقدار یکسان نداشتن متغیرهای ناهمنام؛
- مثبت در نظر گرفتن متغیر؛

اشتباهات و بدفهمی‌های مربوط به اعداد صحیح

Vlassis [۱۶] دریافت که دانش‌آموزان اغلب در مسائلی که عمل منها و علامت منفی در کنار هم می‌آیند، مشکل دارند (از قبیل $(-6) - (6)$). برای مثال بسیاری از دانش‌آموزان در حل معادله $4 - x = 5$ دچار چالش می‌شوند زیرا وقتی آنها می‌خواهند درستی جواب را بررسی کنند، باید جواب $x = -1$ را در معادله جایگزین کنند که در این مواقع آنها در حل $4 - 1 = 5$ با مشکل روبرو می‌شوند. Macgregor and Stacey [۱۷] خطاها و بدفهمی‌های مشابهی در میان دانش‌آموزان در مورد اعداد صحیح پیدا کردند که برخی از آنها عبارتند از: وقتی یک عدد مثبت و منفی را جمع می‌کنند، نمی‌دانند علامت آن را چه قرار دهند؛ وقتی اعداد را ضرب می‌کنند در مورد قوانین مربوط به تعیین علامت دچار سرگردانی می‌شوند. ریحانی و همکاران [۱۸] در تحقیق خود به این نتیجه رسیدند که اغلب دانش‌آموزان پایه هفتم علامت مثبت را صرفاً به عنوان یک عملگر افزایشی در نظر می‌گیرند، در حالیکه درصد بیشتری از دانش‌آموزان پایه دوم راهنمایی درک درستی از مفهوم علامت منفی و مثبت ندارند.

اشتباهات و بدفهمی‌های مربوط به عبارت‌های جبری

وقتی که دانش‌آموزان از حساب به جبر گذر می‌کنند در ساده کردن عبارت‌های جبری دچار چالش‌های زیادی می‌شوند. برای دانش‌آموزان دشوار است که یک عبارت جبری را به عنوان جواب نهایی بپذیرند. یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان جمع و تفریق جملات غیرمتشابه است [۱۹]. Kieran [۲۰] تذکر می‌دهد که دانش‌آموزان در ساده کردن عبارت‌های جبری مشکل دارند. Dede [۲۱] بیان کرد که دانش‌آموزان

دانش‌آموزان، به کیفیت ساختار طرحواره‌های قبلی و توانایی آنها در مرتبط کردن مطالب جدید با آن طرحواره‌ها برای ساختن طرحواره ذهنی مربوط به مفهوم جدید بستگی دارد. براساس پژوهش‌های انجام شده در مورد چگونگی نقش طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌ها چند مورد شناسایی شده که عبارتند از:

○ بازخوانی یک طرحواره نامناسب: دانش‌آموزان برای حل معادله $(x-2)(x-3) = 4$ طرحواره نامناسب $(x-2)(x-3) = 0$ را بازخوانی می‌کنند و به این دلیل برای حل این معادله، هم $(x-3)$ و هم $(x-2)$ را مساوی ۴ قرار می‌دهند.

○ مداخله طرحواره پیشین در یادگیری جدید: مثلاً قضاوت در مورد بزرگی اعداد اعشاری، براساس بزرگی ظاهری آن‌ها انجام شده است که ناشی از مداخله طرحواره مربوط به اعداد صحیح در یادگیری اعداد اعشاری است.

○ مداخله یادگیری جدید در طرحواره قبلی: دانش‌آموز پس از یادگیری ضرب عبارت‌های جبری، دچار بدفهمی شده و با دخالت نابه جای طرحواره جمع در یادگیری جدید خود، حاصل جمع $x+x$ را x^2 نوشته بودند.

○ بیش‌تعمیمی: دانش‌آموزان با تعمیم نابه‌جای خواص ضرب بر جمع، می‌نویسند:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2$$

○ تشابه یک واژه ریاضی با واژه‌ای در زبان عامیانه: مثلاً در اثر تشابه واژه «مجموعه» با واژه عامیانه، آن به عنوان «گردایه»، ممکن است بدفهمی‌های مختلفی در مورد مفهوم مجموعه شکل بگیرند برای مثال عضوهای تکراری، عضوهای مجزا به حساب می‌آیند.

۵. Gunawardenna [۳۰] بیان می‌کند که گاهی اوقات یک طرحواره بخاطر شباهت سطحی در موقعیتی نامناسب استفاده می‌شود و سبب ایجاد اشتباه می‌گردد.

۶. امینی‌فر و همکاران [۱۵] به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان اغلب درک ناقص و محدودی از مفهوم متغیر دارند و بسیاری از آن‌ها نمی‌توانند مفهوم متغیر را با توجه به شرایط مسئله به درستی درک کنند و همین امر سبب می‌شود که عملکرد دانش‌آموزان در جبر ضعیف باشد.

چهارچوب نظری

پژوهش حاضر از نظریه سازنده‌گرایی برای بررسی اشتباهات دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارت‌های جبری استفاده می‌کند. سازنده‌گرایان معتقدند که افراد براساس تجارب شخصی خود، دانش خویش (یعنی مفاهیم، اصول، فرضیه‌ها و تداعی‌ها و ...) را به طور فعال می‌سازند [۳۴]. اگر با دقت به انگاره‌های اصلی این نظریه مانند ساخت دانش توسط یادگیرنده و تاثیر محیط فیزیکی و اجتماعی بر یادگیری، توجه کنیم به راحتی درخواهیم یافت که نظریه و تئوری اصلی حمایت‌کننده سازنده‌گرایی، همان نظریه پیازه است. Piaget [۳۵] بیان می‌کند که یادگیری، فرایند منفعل دریافت اطلاعات از محیط اطراف نیست.

○ دانش‌آموزان در حین ساده کردن عبارت‌های جبری تمایل دارند جملات غیر متشابه را با هم جمع و تفریق کنند برای مثال؛ $5x + 3 = 8x$. دلیل ایجاد این خطا ممکن است این باشد که دانش‌آموزان بر مبنای مفهوم علامت +، جملات غیرمتشابه با هم جمع می‌کنند تا در جواب یک عبارت یک جمله‌ای بنویسند؛ همچنین گاهی دانش‌آموز $3x - 2x$ برابر با ۱ می‌نویسد که دلیل آن ممکن است این باشد که دانش‌آموز تمایل دارد با اعداد و حروف به طور جداگانه برخورد کند؛ لذا $1 = 3 - 2$ و $0 = x - x$ [۳۰].

○ در ساده کردن عبارت $a \times a$ به صورت $2a$ و $a + a$ به صورت x^2 دانش‌آموز ممکن است در مورد قوانین مربوط به جمع و ضرب و یادآوری آنان دچار اختلال شده باشد و یا اینکه قوانین در موقعیت‌های نامناسب به کار برده باشد [۳۱-۲۴].

دلایل اشتباهات دانش‌آموزان

نویسندگان ضمن مطالعات خود با هیچ تحقیقی روبه‌رو نشدند که تمرکز آن روی منشا اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارت‌های جبری باشد، از اینرو در اینجا تحقیقات انجام شده در مورد منشا اشتباهات دانش‌آموزان در مباحث مختلف جبر بیان می‌شود.

۱. مطابق با Stacey and Macgregor [۳۱] ممکن است عوامل زیر سبب ایجاد اشتباه در مسائل جبری شوند:

○ استفاده از حروف جبری به عنوان کلمات مختصر (برای مثال اگر تساوی $x = 3a$ را در نظر بگیریم و منظورمان از این عبارت این باشد که x سه برابر تعداد شی مورد نظر یعنی a است، ممکن است این برداشت ناصحیح شکل بگیرد که منظورمان سه عدد از شی مورد نظر است. مثلاً اگر هر سیب را با نماد a نشان دهیم، دانش‌آموز ممکن است فکر کند منظور از $3a$ ، ۳ سیب است. در حالیکه منظور از $3a$ سه برابر تعداد سیب‌ها است.)

○ اشتباه در مدل‌سازی (نمایش ریاضی یک مسئله کلامی): به عنوان مثال برای مسئله زیر:

مسئله: اگر عددی را با ۲ جمع کنیم و در ۳ ضرب کنیم، حاصل برابر با ۱۲ می‌شود، آن عدد را پیدا کنید.

دانش‌آموزان ممکن است به اشتباه $2 + 3x$ در جواب بنویسند.

۲. Macgregor and Stacey [۱۷] معتقدند زمانیکه مفاهیم جبری در بخش‌های دیگر برنامه درسی ریاضیات استفاده نشوند، دانش‌آموزان آنها را فراموش می‌کنند. بعدها وقتیکه مفاهیم و نمادهای جدید معرفی می‌شوند آنها قادر نیستند بین این مطالب جدید و آنچه که آنها از قبل آموزش دیده‌اند تفاوت قائل شوند و یا ارتباط برقرار کنند.

۳. منشاء دیگر اشتباهات دانش‌آموزان مطابق با Fischbein and Muzicant [۳۲] ممکن است طرحواره‌های ذهنی آنها باشد. برای مثال تفسیر اشتباه دانش‌آموزان از $(a+b)^5$ به صورت $a^5 + b^5$ می‌تواند بخاطر فهم ناقص و نادرست قانون توزیع‌پذیری باشد.

۴. از دیدگاه گویا و حسام [۳۳] طرحواره‌ها توجیه‌گر بدفهمی‌های ذهنی دانش‌آموزان در ریاضی و به تبع آن جبر هستند. کیفیت یادگیری

Brodie [۳۹] معتقد است که فهمیدن اشتباهات یادگیرندگان، روشی برای فهمیدن تفکر آن‌ها است. بنابراین، اشتباهات باید شناخته شوند تا بتوان افکار نادرست دانش‌آموزان را در موقعیت‌های یاددهی و یادگیری تا جایی که امکان دارد اصلاح کرد.

روش پژوهش

این مطالعه در زمره‌ی پژوهش‌های کاربردی می‌باشد و چون هدف آن بررسی اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارات‌های جبری توسط معلمان و یافتن منشا این اشتباهات از دیدگاه آنان می‌باشد، از روش کیفی بهره برده است. با استفاده از روش کیفی می‌توان به درک عمیقی از رفتارهای شرکت‌کنندگان و علل رخداد این رفتارها دست یافت، به دنیای درونی آنها در پژوهش ورود کرد و دانش و اطلاعات خاموش آنها را بیرون کشید. در واقع روش تحقیق کیفی تلاشی در جهت توصیف غیرکمی از داده‌ها با توجه به جزئیات می‌باشد. در پژوهش کیفی جمع‌آوری داده‌ها از طریق روش‌هایی مانند مصاحبه، مشاهده، تجزیه و تحلیل متون مرتبط و یا به صورت ترکیبی از این موارد انجام می‌شود [۴۰]. لذا در این پژوهش برای رسیدن به هدف مدنظر ابتدا با طرح یک آزمون از مبحث ساده کردن عبارات‌های جبری برای دانش‌آموزان پایه هشتم دوره اول متوسطه (یکصد و هشتاد نفر دانش‌آموز دوازدهم در مدرسه) و استخراج موارد اشتباه، از طریق مصاحبه نیم‌ساختاریافته با معلمان ریاضی خواهان آن شدیم که پس از تشخیص نوع اشتباه دلایل رخ داد این اشتباهات را بیان کنند. البته همین درخواست را از ۱۴ نفر دانش‌جو معلم (دختر) دوازدهم سال آخر رشته آموزش ریاضی نیز داشتیم که نتایج چندان قابل ملاحظه نبود و چون امکان انجام مصاحبه حضوری وجود نداشت در جامعه آماری لحاظ نگردید. البته سوالات آزمون برگرفته از مطالعات پژوهشی انجام شده در مورد بدفهمی‌های دانش‌آموزان در درس جبر و کتاب ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه می‌باشد.

شرکت‌کنندگان در پژوهش

جامعه آماری شامل معلمان ریاضی دوره اول متوسطه استان کرمان می‌باشد. جهت انتخاب نمونه از روش نمونه‌گیری هدفمند استفاده گردیده است. زیرا باید افرادی انتخاب می‌شدند که تجربه تدریس مبحث جبر در دوره اول متوسطه را داشتند. نمونه شامل ۱۴ نفر از معلمان ریاضی دوره اول متوسطه می‌باشد. این معلمان بین ۱۲ تا ۲۹ سال سابقه تدریس داشتند.

ابزار گردآوری اطلاعات

داده‌ها با استفاده از مصاحبه‌های نیم‌ساختاریافته جمع‌آوری شدند. هر مصاحبه به صورت انفرادی و با در نظر گرفتن زمان تقریبی ۲۵ دقیقه انجام و ضبط شد. از داده‌های مهم در جریان مصاحبه نسخه‌برداری شد تا اطلاعات کسب شده برای تحلیل آماده و فرآیند مصاحبه شفاهی، به

نظریه سازنده‌گرایی هم معتقد است هنگامی که فرد با ایده‌های جدید مواجه می‌شود یا آنها را با اندیشه‌ها و تجربیات گذشته خود سازگار می‌کند و یا ممکن است آنچه که به آن اعتقاد دارد را برای یادگیری ایده‌های جدید تغییر دهد. از دیدگاه این نظریه یادگیرندگان با دانشی از پایه‌های قبل به یک پایه جدید می‌آیند و از این دانش موجود در ذهن خود برای ساخت دانش جدید استفاده می‌کنند. در واقع آنها معتقدند که کسب مفاهیم جدید زمانی که مفاهیم پایه در مراحل اولیه به خوبی فهمیده نشده باشند، دشوار است [۳۶]. Oliver [۳۷] دانش موجود را طرحواره می‌نامد و آن را اینگونه تعریف می‌کند: طرحواره‌ها ساختارهای شناختی هستند که به وسیله‌ی آنها یادگیرنده به صورت ذهنی دانش خود را سازمان می‌دهد. بنابراین طرحواره‌ها مهمترین ابزار یادگیرندگان هستند.

مفاهیم ریاضی به یکدیگر وابسته‌اند و یادگیری ریاضیات یک فرایند ساختنی است. در طول فرایند یادگیری، تفکر افراد شامل دو فرایند جذب و انطباق می‌باشد [۳۵]. این دو فرایند توصیف می‌کنند که افراد چگونه ذهن خود را برای تجربه‌های جدید تنظیم می‌کنند. فرایند جذب زمانی رخ می‌دهد که تجربه‌ها و رویدادهای تازه براساس طرحواره‌های از پیش موجود، درک می‌شوند و از طرف دیگر فرایند انطباق زمانی روی می‌دهد که تجربه تازه در طرحواره‌های موجود جا نشود. به عبارت دیگر انطباق تغییر و دگرگون کردن طرحواره فعلی برای هماهنگی با اطلاعات جدید می‌باشد [۳۸]. فرایند جذب را می‌توان با استفاده از یک مثال توضیح داد. فرض کنیم که یادگیرنده اتحاد مزدوج را می‌داند، یعنی $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. حال اگر از او بخواهیم که بدون استفاده از ماشین حساب جواب عبارت $101^2 - 99^2$ را به دست آورد، یادگیرنده قادر خواهد بود که از اتحاد مزدوج استفاده کند. لذا یادگیرنده خواهد نوشت

$$101^2 - 99^2 = (101 - 99)(101 + 99) = 400$$

این مثال نشان می‌دهد که یادگیرنده موقعیت جدید را با استفاده از دانش موجود خود پاسخ داده است.

فرایند انطباق هم می‌تواند با یک مثال توضیح داده شود. فرض کنیم دانش‌آموز می‌داند که ba یا $ab = a \times b$ ؛ حال اگر از همین دانش‌آموز بخواهیم که عبارت $5 \times a$ را ساده کند، او ممکن است در جواب بنویسد $a5$. زیرا او فکر می‌کند که $a5$ همان $5a$ است. در اینجا نیاز به بازسازی دانش موجود می‌باشد به طوری که یادگیرنده باید یاد بگیرد که وقتی بخشی از یک عبارت جبری، یک عدد است، حتما عدد باید اول نوشته شود. این نشان می‌دهد که همیشه نمی‌توان تجربه‌های جدید را به طرحواره‌های موجود ربط داد.

مرتبط کردن تجربه‌های جدید به طرحواره‌های موجود نیازمند این است که مفاهیم و قوانینی که قبلاً فراگرفته شده‌اند به یاد آورده شوند و همین کار را برای یادگیرنده دشوار می‌کند. زیرا فراموش کردن قوانین و مفاهیم، به یاد آوردن مفاهیم و قوانین ناقص و نادرست سبب سردرگمی یادگیرندگان و در نتیجه ایجاد اشتباه توسط آنان می‌شوند. این اشتباهات در واقع نتیجه تلاش افراد برای ساختن دانش می‌باشند [۳۷].

از دیدگاه معلمان دانش‌آموزان مرتکب ۲۲ نوع اشتباه در ساده کردن عبارات‌های جبری شده بودند. در ادامه این اشتباهات و منشا ایجاد آن‌ها بیان می‌شود.

اشتباهات مربوط به توان

(۱) دانش‌آموزان به هنگام جمع جملات متشابه، توان متغیرها را جمع می‌کردند؛ برای مثال

$$9b^2 + 4b^2 = 13b^4$$

(۲) دانش‌آموزان تفسیر اشتباهی از توان و جایگاه آن در هم‌ارزی داشتند، زیرا فکر می‌کردند که $3a^2$ هم‌ارز با 3^2a می‌باشد.

(۳) برخی دانش‌آموزان $3a^2 + 4a^2$ را به صورت $7a^2$ ساده کردند اما جواب نهایی را بخاطر ضرب توان در ضریب، مساوی با 14a نوشتند. همچنین می‌توان به اشتباه دیگری از این نوع اشاره کرد.

$$3a + 4a^2 = 3a + 8a = 11a$$

(۴) دانش‌آموز توان متغیر را هم برای متغیر و هم برای عدد در نظر گرفته است. برای مثال

$$4 + 5y^2 = 4 + 25y^2$$

معلمان معتقد بودند که این اشتباهات به چند دلیل رخ خواهند داد:

- دانش‌آموزان از مبحث توان برداشت درستی ندارند؛
- مفهوم توان را نفهمیده‌اند؛
- مفاهیم جدید باعث اشتباه می‌شوند زیرا دانش‌آموزان در بکار بردن قوانین ضرب و جمع متغیرهای توان‌دار دچار سردرگمی می‌شوند؛
- توجه نکردن به محل قرار گرفتن توان؛
- عدم تشخیص اینکه توان متعلق به عدد است یا حرف؛
- دانش‌آموز در ذهن خود اینگونه ثبت کرده است که توان متغیر متعلق به ضریب هم خواهد بود؛
- عدم دقت در خواندن عبارت جبری؛
- تداخل مطالب در ذهن دانش‌آموز، چون دانش‌آموز $5y^2$ را با عبارت $(5y)^2$ اشتباه گرفته است و نمی‌تواند تشخیص دهد که وقتی $5y$ داخل پرانتز باشد باید عدد 5 هم به توان دو برسد. (تداخل موقعیت‌های مشابه)؛
- داشتن تفکرات نادرست (هر عبارت جبری حتما ساده می‌شود. لذا در مورد ۳، دانش‌آموز سعی کرده با متشابه کردن جملات عبارت جبری را ساده کند).

اشتباهات مربوط به علامت‌ها مثبت و منفی و جمع، تفریق و ضرب/عدد صحیح

(۱) دانش‌آموزان حاصل جمع و تفریق ضرایب جملات متشابه را اشتباه محاسبه می‌کردند. برای مثال $-6a + 3a$ را به صورت $-9a$ و یا $3a$ ساده کردند.

(۲) زمانی که عبارت جبری علاوه بر داشتن جملات دارای متغیر، جملات عددی هم داشته باشد دانش‌آموزان مرتکب اشتباه می‌شوند. برای مثال؛ $5ab - 6 + 4ba + 7$ را به صورت $9ab - 13$ و یا $9ab - 1$ ساده می‌کنند.

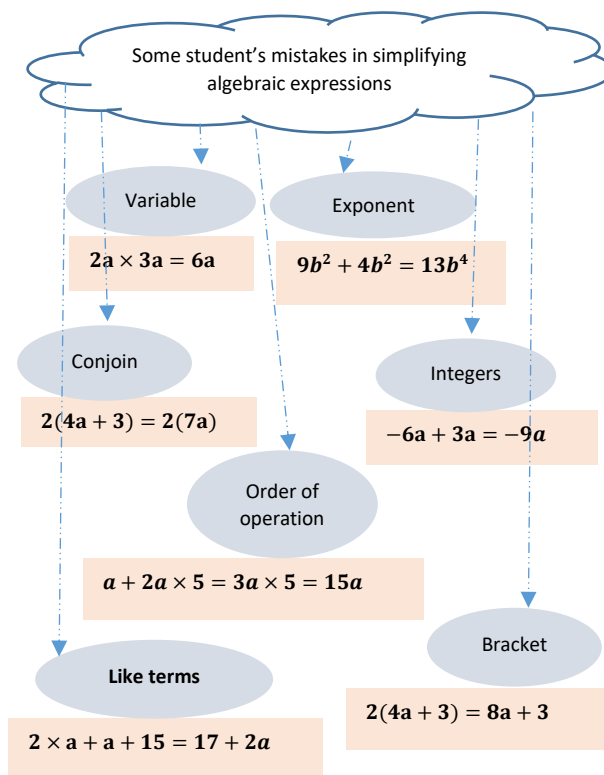
صورت متنی یکپارچه تدوین شود. هر مصاحبه با پرسیدن نظر مصاحبه شونده در مورد دلایل ایجاد این اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارات‌های جبری آغاز و با سوال‌های خرد (برگرفته از پاسخ افراد) ادامه پیدا می‌کرد.

تجزیه و تحلیل داده‌ها

برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از تحلیل محتوای کیفی استفاده شد، بدین ترتیب که پس از پیاده‌سازی مصاحبه‌ها، مطالبی که در راستای رسیدن به هدف بودند مورد تفسیر قرار گرفتند و مطالب حاشیه‌ای و غیر مرتبط حذف گردیدند. این کار چندین بار تکرار شد تا جایی که اطمینان حاصل گردید که یافته جدیدی از داده‌ها بدست نخواهد آمد.

یافته‌ها

در این قسمت ابتدا اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارات‌های جبری از دیدگاه معلمان مطرح می‌شوند که برخی از آنها در شکل ۱ نشان داده شده‌اند و سپس دلایل اختصاصی (و نه عمومی) بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ساده کردن عبارات‌های جبری که نگاه ویژه ما به آن‌ها می‌باشد بیان می‌گردند.



شکل ۱: برخی از اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارات‌های جبری
Fig. 1: Some mistakes made by students in simplifying algebraic expressions

- ۳) دانش‌آموزان زمانی که دو متغیر را ضرب می‌کردند، ضرایب متغیر را ضرب می‌کردند و توان متغیر را بدون تغییر می‌نوشتند. برای مثال
- $$2a \times 3a = 6a$$
- ۴) دانش‌آموز ضریب متغیر را در عدد ضرب می‌کند. برای مثال
- $$2 \times a + a + 15 = 30 + a + a = 30 + 2a$$
- معلمان معتقد بودند که این اشتباهات به چند دلیل رخ خواهند داد:
- ضریب عددی نامعلوم ۱ در $-a$ منجر می‌شد که دانش‌آموز ضریب a را صفر در نظر بگیرد؛
 - دانش‌آموزان قوانین جمع و ضرب را اشتباها به کار می‌برند؛
 - عدم درک قوانین ضرب و جمع متغیرها (حروف)؛
 - برخی از بچه‌ها می‌دانند جواب می‌شود a^2 اما نمی‌توانند آن را بنویسند؛
 - عدم تشخیص تفاوت مفاهیم (تفاوت بین $2x$ و x^2 را نمی‌داند)؛
 - بی‌توجهی و یا اشتباه گرفتن علامت ضرب با جمع؛
 - نادرست نوشتن عبارت جبری (عدم وجود پرانتز و یا شاید اگر علامت ضرب بین a و 2 نبود این اشتباه رخ نمی‌داد)؛
 - جابه‌جا گرفتن قوانین (در مبحث ضرب عبارتهای جبری گفته می‌شود که عدد در عدد و متغیر در متغیر ضرب می‌شود. شاید دانش‌آموز در مورد سوم از این قانون استفاده کرده است).

اشتباهات مربوط به باز کردن پرانتز

- ۱) دانش‌آموزان جمله دوم پرانتز را نادید می‌گرفتند؛ برای مثال
- $$2(4a + 3) = 8a + 3$$
- ۲) دانش‌آموزان جمله قبل از پرانتز را در تمام جملات عبارت جبری ضرب می‌کنند. برای مثال
- $$2(3a + 2) + 3 + 4a = 6a + 4 + 6 + 8a$$
- ۳) دانش‌آموز در ضرب دو پرانتز، زمانی که ضرایب متغیر قرینه باشند، اعداد را ضرب می‌کند. برای مثال
- $$(4 - y)(3 + y) = 4 \times 3 = 12$$
- ۴) دانش‌آموز در ضرب دو پرانتز، جملات اول را در هم و جملات دوم را هم در هم ضرب می‌کند. برای مثال
- $$(3x - 2)(4x + 5) = 12x^2 - 10$$
- معلمان معتقد بودند که این اشتباهات به چند دلیل رخ خواهند داد:
- عدم توجه به مکان شروع و پایان پرانتز؛
 - ندانستن مفهوم پرانتز، ندانستن قوانین ضرب پرانتزها؛
 - عدم توجه به عمل ضرب بین دو پرانتز، فراموش کردن قوانین ضرب عدد در پرانتز و پرانتز در پرانتز، کاربرد مفاهیم و قوانین در موقعیت نامناسب (دانش‌آموز بدون توجه به پرانتزها، با دیدن جملات قرینه y و $-y$ آنها را جمع کرده است)؛
 - درک ناقص (در ضرب فقط ضرایب ضرب می‌شوند و توان متغیر تغییر نمی‌کند)؛
 - بکار بردن قوانین ساختگی (در ضرب دو پرانتز که هر کدام دو جمله‌ای هستند باید جملات اول را در هم و جملات دوم را هم در هم ضرب کرد)؛

- ۳) علامت حاصل جمع و تفریق را اشتباه تعیین می‌کردند. برای مثال $9ac - 3ac$ را به صورت $12ac$ ساده می‌کردند.
- ۴) دانش‌آموز در مورد نقش علامت مثبت و منفی دچار اشتباه شده است. برای مثال
- $$+3(6a - 7) = -18a + 21$$
- معلمان معتقد بودند که این اشتباهات به چند دلیل رخ خواهند داد:
- بی‌توجهی به علامت؛
 - اشتباه گرفتن علامت مثبت در نقش قرینه؛
 - عدم تشخیص علامت قرینه؛
 - دانش‌آموزان جمع اعداد صحیح را بدون در نظر گرفتن علامت منفی انجام می‌دهند و سپس علامت منفی را قبل از جواب می‌گذارند؛
 - کنار هم نبودن جملات عددی سبب ایجاد اشتباه می‌شود زیرا دانش‌آموزان $7 + 6 -$ را درست پاسخ می‌دهند؛
 - آنها به محض دیدن علامت منفی از مفهوم تفریق در حساب استفاده می‌کنند (عدد بزرگتر منهای عدد کوچکتر)؛
 - دانش‌آموزان اشتباها قوانین یاد گرفته شده در حساب را بکار می‌برند؛
 - یاد نگرفتن قوانین تعیین علامت در چهار عمل اصلی؛
 - دانش‌آموزان برای تعیین علامت قوانین اشتباه را بکار می‌برند، یعنی به جای نوشتن علامت عدد بزرگتر، دو علامت را ضرب می‌کنند. به عبارتی دانش‌آموزان دیدگاه رویه‌ای (در اینجا منظور قانون ضرب علامت‌ها) را بیش از دیدگاه محور اعداد در جمع و تفریق اعداد صحیح استفاده می‌کردند؛
 - داشتن تفکرات اشتباه (جواب آخر حتما باید مثبت باشد).

اشتباهات مربوط به وصل کردن

- ۱) دانش‌آموز جملات غیرمتشابه $4a + 3$ را به صورت $7a$ ساده می‌کند.
- ۲) دانش‌آموز جملات داخل پرانتز را جمع می‌کند. برای مثال
- $$2(4a + 3) = 2(7a)$$
- معلمان معتقد بودند که این اشتباهات به چند دلیل رخ خواهند داد:
- دانش‌آموزان مفهوم عبارتهای جبری نمی‌فهمند. آنها یک متغیر و یک عدد را به هم وصل می‌کنند؛
 - خطای وصل کردن در بسط پرانتز رخ می‌دهد زیرا دانش‌آموزان اولویت را با حل پرانتز می‌دانند و بخاطر همین بدون اینکه جمله ماقبل پرانتز را در آن ضرب کنند، جملات داخل پرانتز را جمع می‌کردند.

اشتباهات مربوط به متغیر

- ۱) ضریب جملاتی که عدد نداشتند را به جای عدد ۱، صفر در نظر می‌گرفتند. برای مثال
- $$-8a - a = -8a$$
- ۲) دانش‌آموزان زمانی که دو متغیر را ضرب می‌کردند، ضرایب متغیر را جمع می‌کردند و توان متغیر را بدون تغییر می‌نوشتند. برای مثال
- $$a \times a = 2a$$

آن لازمه فراگیری مفاهیم در سطوح بالاتر می‌باشد، مبحث ساده کردن عبارتهای جبری است. این در حالیست که دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در ساده کردن عبارتهای جبری دچار اشتباهات فراوانی می‌شوند و اکثر دانش‌آموزان - حتی برخی از دانش‌آموزان ممتاز - با این اشتباهات دست به گریبان هستند. شناسایی این اشتباهات و ریشه‌یابی آن‌ها می‌تواند به بهبود فرایند یادگیری کمک کند. لذا این پژوهش با هدف بررسی اشتباهات دانش‌آموزان در ساده کردن عبارتهای جبری توسط معلمان ریاضی و یافتن منشا این اشتباهات از دیدگاه آنان انجام شده است. یافته‌های این پژوهش نشان دادند که از دیدگاه معلمان ریاضی، دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارتهای جبری مرتکب اشتباهاتی در ارتباط با الف (توان، ب) علامت مثبت و منفی؛ ت جمع، تفریق و ضرب اعداد صحیح؛ پ) وصل کردن؛ ج) اعمال مربوط به متغیر؛ د) باز کردن پرانتز؛ ه) جملات متشابه و و) رعایت ترتیب عملیات می‌شوند. این یافته با یافته‌های امینی‌فر و همکاران [۱۵]، Seng [۲۶] و ریحانی و همکاران [۴۱] همسو می‌باشد. همچنین یافته‌های این پژوهش نشان دادند که از دیدگاه معلمان ریاضی، دلایل ایجاد اشتباهات دانش‌آموزان به هنگام ساده کردن عبارتهای جبری عبارتند از:

- عدم درک، درک اشتباه و یا درک ناقص مفاهیم متغیر، توان، پرانتز و جملات متشابه؛
- ندانستن، فراموش کردن، کاربرد نادرست و یا یادآوری ناقص قوانین مربوط به ضرب اعداد توان‌دار، ضرب یک‌جمله‌ای در پرانتز و یا ضرب پرانتز در پرانتز (هر پرانتز حاوی دو جمله است)؛
- تفکرات نادرست؛
- نادیده گرفتن علائم و نمادها؛
- قوانین خودساخته دانش‌آموز در برخورد با توان و پرانتز؛
- دخالت یادگیری‌های قدیم در یادگیری‌های جدید و بالعکس؛
- شباهت‌های جملات در عبارت جبری؛
- محاسبه نادرست جمع، تفریق و ضرب اعداد صحیح؛
- عدم دقت در خواندن عبارتهای جبری.

این یافته نیز با یافته‌های محققانی چون Macgregor M Stacey [۱۷]، ریحانی و همکاران [۱۸] و گویا و حسام [۳۳] همسو می‌باشد. با توجه به اینکه اشتباهات جبری باعث سردرگمی و عدم موفقیت دانش‌آموزان در حل مسایل می‌شوند، لذا پرداختن به عوامل شکل‌گیری، ریشه‌یابی و آگاهی از اشتباهات می‌تواند به معلمان کمک کند تا در جهت یادگیری موثرتر دانش‌آموزان در کلاس درس و عرصه علم و دانش گام بلندی بردارند [۴۲]. تشخیص دلایل ایجاد اشتباهات کمک خواهد کرد که بفهمیم چه روشی، کی و کجا در یادگیری دانش‌آموزان موثر است [۴۳]. به طور کلی بررسی، تحلیل و ریشه‌یابی اشتباهات دانش‌آموزان در مباحث ریاضی به منظور یافتن چرایی ایجاد و رفع خطاها و بدفهمی‌ها ضروری است [۴۴]. از اینرو نویسندگان این پژوهش تلاش کردند تا با جستجوی اشتباهات دانش‌آموزان و دلایل رخ داد آن‌ها

○ درک ناقص (دانش‌آموز یاد گرفته است که در ضرب یک جمله‌ای در پرانتز، باید یک‌جمله‌ای را در کل عبارت جبری ضرب کند و تاکید نشده است که فقط در خود پرانتز ضرب شود و شاید در مورد ۲ هم مرتکب همین اشتباه شده است).

اشتباهات مربوط به جملات متشابه

۱) دانش‌آموزان برای متشابه بودن به جای بررسی کردن متغیر گاهی ضرایب را بررسی می‌کنند. برای مثال

$$5a + 5b = 10ab$$

۲) دانش‌آموزان جملاتی را که حرف انگلیسی دارند، متشابه می‌دانند. برای مثال

$$15c + 20 - 10a = 5ac + 20$$

۳) اگر بین متغیر و عدد علامت ضرب گذاشته شود، دانش‌آموزان آن ضریب را با جملات عددی متشابه می‌گیرند. برای مثال

$$2 \times a + a + 15 = 17 + a + a$$

۳) برخی از دانش‌آموزان جملات ab و ba را متشابه نمی‌دانند. معلمان معتقد بودند که این اشتباهات به چند دلیل رخ خواهند داد:

- ندانستن مفهوم جملات متشابه؛
- عدم تشخیص جملات متشابه و غیر متشابه؛
- فهم ناقص مفاهیم (برای متشابه بودن فقط حروف را بررسی می‌کند و کاری به توان حروف ندارد)؛
- ندانستن قوانین از جمله قانون جابه جایی؛
- ساختار ذهنی نادرست (داشتن حرف انگلیسی برای متشابه بودن کافیسست حتی اگر حروف متفاوت باشند).

اشتباهات مربوط به ترتیب عملیات

۱) دانش‌آموزان بدون ضرب کردن، حروف را جمع می‌کنند. برای مثال

$$a + 2a \times 5 = 3a \times 5 = 15a$$

معلمان معتقد بودند که این اشتباهات به چند دلیل رخ خواهند داد:

- فقدان دانش اساسی و اصولی در مورد ساختار عملیات حساب؛
- تمایل به انجام عملیات حساب از چپ به راست؛
- توجه نکردن به اولویت عملیات ریاضی؛
- ندانستن ترتیب اولویت،
- یادگیری ناقص ترتیب اولویت؛
- صورت مبهم عبارت (اگر از پرانتز استفاده شود میزان اشتباهات کاهش می‌یابد).

بحث و نتیجه‌گیری

جبر یکی از مباحث ریاضی است که در برنامه درسی روی یادگیری آن تاکید زیادی شده است. همه دانش‌آموزان باید جبر را یاد بگیرند، و معلمان باید به دانش‌آموزان کمک کنند تا در ذهن خود یک فهم عمیق و ماندگار از جبر برای کار کردن همراه با مهارت بیشتر در پایه‌های متوسطه و دبیرستان ایجاد کنند. از جمله مباحث جبری که یادگیری

[5] Jordan N, Kaplan D, Locuniak M, Ramineni C. Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice*. 2007; 22(1): 36-46.

[6] Booth JL, Koedinger KR. Key misconceptions in algebraic problem solving, In B. C. Love, K. Mcreae & V. M. Sloutsky, (eds.) *Proceedings of the 30th Annual Cognitive Science Society*. Austin, TX: Cognitive Science Society; 2008. p. 571-576.

[7] Chow T-CF. *Students Difficulties, Conceptions and Attitudes towards Learning Algebra: An Intervention Study to Improve Teaching and Learning* [doctoral dissertation]. Australia: University of Curtin; 2011.

[8] Bennett VM. *Understanding the meaning of the equal sign: an investigation of elementary students and teachers* [doctoral dissertation]. US: University of Louisville; 2015.

[9] Mohr DJ. Pre-service Elementary Teachers Make Connections between Geometry and Algebra Through the use of technology. *IUMPST: The Journal Technology*. 2008; 3.

[10] Boz N. *Interactions between knowledge of variables and knowledge about teaching variables* [doctoral dissertation]. UK: University of Warwick; 2004.

[11] Kuchemann D. Algebra, In K. M. Hart, (eds.) *Childrens Understanding of Mathematics*. Oxford, U. K: John Murray. London; 1981.

[12] Steinle V, Gvozdenko E, Price B, Stacey K, Pierce R. Investigating Students Numerical Misconceptions in Algebra, In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess, (eds.) *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2). Palmerston North, NZ: MERGA; 2009.

[13] Asquith P, Stephens A, Knuth E, Alibali M. Middle School Mathematics teachers' Knowledge of Students understanding of core Algebraic Concepts: Equal Sing and Variable. *Journal of Mathematical Thinking and Learning*. 2007; 9(3): 249-272.

[14] Nyman R, Kilhamn C. Enhancing Engagement in Algebra: Didactical Strategies Implemented and Discussed by Teachers. *Scandinavian Journal of Educational Research*. 2015; 59(6): 623-637.

[15] Aminifar E, Zohrevand S, Zaeembashi A. [Students understanding and misconception of the concept of variable in preliminary algebra]. *Quarterly Journal of Educational Innovations*. 2015; 14(1): 77-95. Persian.

[16] Vlassis J. The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: the case of the minus sign. *Philosophical Psychology*. 2008; 21(4): 555-570.

[17] Macgregor M, Stacey K. Student understanding of algebraic notation: 11-15. *International Journal Educational Studies in Mathematics*. 1997; 33(1): 1-19.

در مبحث ساده کردن عبارتهای جبری از دیدگاه معلمان، افراد دست‌اندر کار در امر آموزش مخصوصاً معلمان را از وجود آن‌ها آگاه کنند تا توجه‌شان نسبت به این اشتباهات و منشا رخ داد آن‌ها افزایش یابد و با اتخاذ مناسبترین جو کلاسی و شیوه آموزشی به گونه‌ای تدریس کنند که ظهور این اشتباهات به حداقل برسد یا این که با آگاهی نسبت به وقوع احتمالی آن‌ها از قبل آمادگی داشته و راهکاری برای مواجهه با آنها در ذهن داشته باشند. حتی معلمان می‌توانند با آگاهی از منشا اشتباهات جبری، از آن‌ها برای ایجاد تضاد مفهومی و ایجاد درک و فهم درست استفاده کنند. از آنجا که در جبر مفاهیم به صورت سلسله مراتبی شکل گرفته است، یادگیری هر مفهوم به فهم و درک و برداشت دانش‌آموزان از مفاهیم پیش‌نیاز بستگی دارد، لذا زمانیکه معلمان در کلاس جبر با آگاهی کامل نسبت به دلایل ایجاد اشتباهات حاضر شوند، تلاش می‌کنند که مفاهیم پیش‌نیاز، به درستی و بدون شکل‌گیری بدفهمی‌ها و رخ دادن خطاها توسط دانش‌آموزان کسب شوند. این کار خود باعث می‌شود دانش‌آموزان در حل مسائل جبری کمتر اشتباه کنند، اعتماد به نفس آنها بالاتر رود و در نهایت عملکرد بهتری داشته باشند.

مشارکت نویسندگان

نویسندگان در تمامی مراحل انجام و نگارش مقاله با یکدیگر همکاری داشته‌اند.

تشکر و قدردانی

این مقاله مستخرج از رساله دکتری نویسنده اول می‌باشد که هنوز از آن دفاع نشده است. لازم است از همکاری صمیمانه معلمان ریاضی دوره اول متوسطه استان کرمان و به ویژه آقایان شادروان حمدالله ملانی و سلمان اسفندیاری که در جمع‌آوری داده‌ها همکاری نموده‌اند تشکر و قدردانی به عمل آوریم.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.»

منابع و مأخذ

[1] Girit, D, Akyuz D. Algebraic thinking in Middle School Students at Different Grades: Conceptions about Generalization of Patterns. *Education Journal of Science and Mathematics Education*. 2016; 10 (2): 243-272.

[2] Bush SB. *Analyzing common algebra-related misconceptions and errors of middle school students* [doctoral dissertation]. US: University of Louisville; 2011.

[3] Guler M, Celic D. A research on future mathematics teacher's instructional explanations: the case of algebra. *Journal of Educational Research and Reviews*. 2016; 11(16): 1500-1508.

[4] Booth J, Barbieri C, Eyer F, Pare-Blagoev J. Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem Solving*. 2014; 7 (1): 10-23.

- [32] Fischbein E, Muzicant B. Richard skemp and his conception of relational and instrumental understanding: Open sentences and phrases, In D. Tall & M. O. J. Thomas (eds.) *Intelligence, Learning and Understanding Mathematics*. Flaxton, Australia: Post Pressed; 2002. pp.49-78.
- [33] Goya Z, Hessam A. [Mental schemas: Justifier of students' math misunderstandings]. *Journal of Applied Psychology*. 2007; 1(2): 177-200. Persian.
- [34] Fosnot C. Constructivism revisited, Implications and Reflections. *The Constructivist Fall*. 2005; 16(1): 1-17.
- [35] Piaget J. *The science of education and the psychology of the child*. New York: Grossman; 1970.
- [36] Makonye J, Nhlanhla S. Exploring 'Non-Science' Grade 11 learners in solving quadratic equations. *Mediterranean journal of social sciences*. 2014; 5(27): 634-644.
- [37] Oliver A. *Handling pupils' misconceptions*. Presidential address delivered at the 13th National Convection on Mathematics, Physical Science and Biology. *Pretoria*, 3-7 July; 1989.
- [38] Moodley V. *An investigation of learners' performance in algebra from Grade 9 to 11* [master's thesis]. Johannesburg: University of Witwatersrand; 2014.
- [39] Brodie K. Learning about learner errors in professional communities. *Educational Studies in Mathematics*. 2014; 85(1): 221-239.
- [40] Merriam SB, Tisdell EJ. *Qualitative research: A guide to design and implementation*. US: John Wiley & Sons Publishing; 2009.
- [41] Reyhani E, Sharifi Z, Soltani M. [Misunderstandings about the Concept of Limit among High School Seniors]. *Quarterly journal of Education*. 2017; 32(4): 41-66. Persian.
- [42] Delfkar N. *The Effect of Teaching Students-Teachers on the Formation of Mental Misconceptions of Students in the Limit* [Master dissertation]. Kerman: University of Shahid Bahonar; 2015. Persian.
- [43] Alamian V, Seyyedi M, Habibi M. [Identifying the misconceptions of eighth grade students on geometry skills and the use of Van Hiele theory to improve their geometry skills]. *Quarterly journal of Educational innovations*. 2018; 17(3): 123-147. Persian.
- [44] Khademi F. *Study of Misconceptions of High School Students in Mathematical Definitions and Concepts* [Master dissertation]. Marvdasht: Islamic Azad University, Marvdasht Branch; 2015. Persian.
- [18] Reyhani E, Hamidi F, Rashedi F. [A study on negative numbers Conception of students and their misconceptions]. *Technology of Education Journal*. 2016; 10(2): 115-131. Persian.
- [19] Bush S, Karp K. Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *Journal of Mathematical Behavior*. 2013; 32: 613-632.
- [20] Kieran C. *What do students struggle with when first introduced to algebra symbols?* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 2008.
- [21] Dede Y. The concept of variable and identification its learning difficulties. *Educational Sciences: Theory & Practice*. 2004; 4(1): 50-56.
- [22] Capraro MM, Joffrion H. Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Journal of Reading Psychology*. 2006; 27(1): 147-164.
- [23] Davis EA, Krajcik J. Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Journal of Educational Researcher*. 2005; 34(3): 3-14.
- [24] Owusu J. *The Impact of Constructivist- Based Teaching Method on Secondary School Learners Errors in Algebra* [master's thesis]. Pretoria: University of South Africa; 2015.
- [25] Hall RDG. An analysis of thought processes during simplification of an algebraic expression. *Journal of mathematics education*. 2002; 1-15.
- [26] Seng LK. An error analysis of Form 2 (Grade 7) students in simplifying algebraic expressions: A descriptive study. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*. 2010; 8(1): 139-162.
- [27] Reyes J. *Equal or not? An exploration of eighth-grade student's experience of Algebra* [doctoral dissertation]. US: University of Georgia Southern; 2012.
- [28] Tirosh D, Even R, Robinson N. Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Journal of Educational Studies in Mathematics*. 1998; 35(1): 54-61.
- [29] Jupri A, Drijvers P, Van den Heuvel-Panhuizen M. Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Journal of Mathematics Education Research*. 2014; 26(4): 683-710.
- [30] Gunawardenna, E. *Secondary school student's misconceptions in algebra* [doctoral dissertation]. Canada: University of Toronto; 2011.
- [31] Stacey K, Macgregor M. Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*. 2000; 18(2): 149-169.

معرفی نویسندگان



محمدرضا فدایی دانشیار بخش آموزش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان و علاقمند به تحقیقات در حل مسئله و برنامه‌ریزی درسی در حوزه آموزش ریاضی می‌باشد.

Fadaee, M. R., Associate Professor, Pure Mathematics Shahid Bahonar University, Kerman, Iran

mr_fadaii@mail.uk.ac.ir

AUTHOR(S) BIOSKETCHES



نوشین فرامرزیپور دانشجوی دکتری رشته آموزش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان می‌باشد که در دو حوزه باورهای ریاضی و بدفهمی‌های دانش‌آموزان تحقیقاتی را انجام داده است.

Faramarzpoor, N. Phd Student, Pure Mathematics, Shahid Bahonar University, Kerman, Iran

nooshin.faramarzpoor@yahoo.com

Citation (Vancouver): Faramarzpoor N, Fadaee M.R. [The Investigation of students' mistakes in simplifying algebraic expressions, and finding the source of these mistakes from the viewpoint of Mathematics teachers]. *Tech. Edu. J.* 2020; 14(4): 959-970

<http://dx.doi.org/10.22061/tej.2020.5045.2158>



COPYRIGHTS



©2020 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.