

# مقایسه نتیجه های مدل عددی و آزمایشگاهی جریان یک بُعدی از روی

## سرریز سدها

محمد هادی افشار

دانشکده عمران - دانشگاه علم و صنعت ایران

MHAfshar@iust.ac.ir

حامد ارزانی

دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

Arzani@iust.ac.ir

تحلیل جریان روی سرریز سدها به روش های عددی در مقایسه با تهیه مدل فیزیکی، کاراترین روش به منظور کاستن هزینه ها و زمان است. به طور کلی و مستقل از نوع روش مورد استفاده تحلیل جریان در روی سرریزها در شرایط دائمی آن مستلزم حل دسته معادله های دیفرانسیلی درگیر بنام معادله های ناویراستوکس با منظور کردن سطح آزاد جریان است که بسیار پیچیده و غیراقتصادی است. یکی از انواع معادله های مورد استفاده در سرریزها، استفاده از مدل معادله های میانگین عمقی یا به عبارت دیگر معادله های آبهای کم عمق هستند که از انتگرالگیری معادله های ناویر-استوکس در عمق و اعمال شرایط مرزی سطح و بستر منتج می شوند. معادله های میانگین عمقی که بنام معادله های آبهای کم عمق نیز معروفند، به طور عمده برای شبیه سازی جریاناتی که مقدار سرعت در عمق جریان ثابت و نیز توزیع فشار در عمق آنها هیدرواستاتیک باشد کاربرد دارند. به علت پیچیدگی معادله های و نیز عدم وجود جواب دقیق، تاکنون روش های عددی متفاوتی برای حل معادله های حاکم بر پدیده های فیزیکی ابداع شده است. یکی از جدیدترین این روش ها مجموعه روش های بدون شبکه است که در دو دهه اخیر برای حل معادله های دیفرانسیل معرفی شده است که هرکدام دارای مزایا و معایب مخصوص به خود هستند. گسسته سازی مسأله در بسیاری از روش های بدون شبکه به معادله های انتگرالی منجر می شود که حل آنها نیازمند انتگرالگیری عددی و معرفی نقاط گوس و وزنه های مربوط همراه با شبکه بندی است. در این مقاله روش حداقل مربعات گسسته برای حل معادله های آبهای کم عمق به کار گرفته می شود. از حداقل مربعات گسسته در مرحله گسسته سازی معادله دیفرانسیل به منظور دستیابی به معادله های جبری و همچنین از حداقل مربعات وزنی داده ها بمنظور دستیابی به مقدارهای تابع های شکل استفاده شده است. مهمترین مزیت این روش را باید در حذف مراحل انتگرال گیری از روال محاسبه ماتریسهای ضریب ها و همچنین پشتوانه بدون شبکه بودن آن در مفهوم واقعی دانست. درست یابی روش با تحلیل عددی جریان روی سرریز یکی از سدهای کشور و مقایسه آن با نتیجه های مربوط به سرعت و تراز آب در مدل فیزیکی انجام شده است.

### چکیده

### کلید واژه ها

بدون شبکه، حداقل مربعات گسسته، معادله های هذلولوی، معادله آبهای کم عمق

## ۱- مقدمه

استفاده از روش‌های بدون شبکه<sup>۱</sup> بعلاوه وجود برخی مزیت‌ها در دو دهه گذشته مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. در تمامی روش‌های بدون شبکه گسسته‌سازی حوزه فیزیکی مسأله با تعداد مناسبی از نقاط که هر یک شامل زیرحوزه‌های<sup>۲</sup> متداخل با زیرحوزه‌های نقطه یا نقاط همسایه است انجام می‌شود. مباحث نقاط ارتباطی<sup>۳</sup> اجزای محدود در روش‌های بدون شبکه به وسیله‌ی تعداد نقاط مشترک موجود در ناحیه مشترک هر یک از زیرحوزه‌ها بیان می‌شود. در واقع در این روش دو نقطه در صورتی با یکدیگر ارتباط دارند که در ناحیه مشترک حوزه تاثیرشان تعداد نقاط مشخصی که تامین کننده شرط معکوس‌پذیری<sup>۴</sup> ماتریسها است، وجود داشته باشد. کاوه و همکاران [۱] گرافهای مناسبی را به منظور رتبه‌بندی نقاط و تامین ماتریس‌های توپو در روش‌های بدون شبکه ارائه کرده‌اند. Nayroles و همکاران [۲] نخستین کسانی بودند که تقریب حداقل مربعات متحرک<sup>۵</sup> را در روش گالری استاندارد بکار گرفتند و آنرا روش جزء پخش<sup>۶</sup> نامیدند. Belytschko و همکاران [۳] با انجام اصلاحاتی بر روی روش جزء پخش و تکمیل آن پایه‌گذار روش گالری مستقل از جزء<sup>۷</sup> شدند. در واقع این روش را باید شروع بکارگیری حداقل مربعات در روش‌های بدون شبکه تلقی نمود. شاید بهترین مرجع معرفی انواع روش‌های بدون شبکه و همچنین قابلیت برخی از روش‌ها برای ترکیب شدن با اجزاء محدود برای اعمال شرایط مرزی در حل معادله‌ی دیفرانسیل را باید در مقاله Belytschko و همکاران [۴] یافت. Bonet و همکار [۵] در ادامه فعالیت‌های سال ۱۹۹۷ خودشان و دکتر حسنی [۶] روش موسوم به هیدرودینامیک ذره‌های هموار اصلاح شده<sup>۸</sup> یا CSPH را به منظور اصلاح دقت و سازگاری روش هیدرودینامیک ذره‌های هموار و با اعمال تصحیح روی تابع‌های کرنل ارائه کردند. در مقاله ایشان افزون بر تصحیح تابع‌های کرنل با تصحیح انتگرالگیری و استفاده

از انتگرال نقطه‌ای، توانمندی روش با ارایه نتیجه‌های حل معادله‌ی پواسون در روش SPH و CSPH مقایسه شد. Luo و همکار [۷] نوع جدیدی از گسسته‌سازی معادله‌های دیفرانسیل را در حل مسایل سازه‌ای ارائه کردند که از کمینه‌یابی باقیمانده‌های حوزه‌ای در کلیه نقاط حل مسأله‌های بدست می‌آید. که بدلیل شباهت روش پیشنهادی به روش تفاضل محدود، نامش را تفاضل محدود عمومی نامیدند. اگرچه شروع به کارگیری روش‌های بدون شبکه همانند شروع بکارگیری اجزای محدود از مسایل سازه‌ای بوده است ولی در فاصله زمانی اندک ایده استفاده از روش‌های بدون شبکه و به ویژه روش حداقل مربعات برای حل معادله‌های دیفرانسیل و متعاقباً مسایل سیالات قوت گرفت. Onate و همکاران [۹، ۸] برای حل معادله جابجایی-پخش<sup>۹</sup> و مسایل جریان سیالات از حداقل مربعات وزنی برای درونیابی در روش هم مکانی نقطه‌ای<sup>۱۰</sup> استفاده کردند. Chongjiang [۱۰] جریان دوبعدی رودخانه را با فرض معادله‌های آبهای کم عمق<sup>۱۱</sup> با روش گالری مستقل از جزء مدلسازی کرد. بسیاری روش‌های بدون شبکه نوع گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل و همچنین محاسبه ماتریس ضریب‌ها در آنها بشکل انتگرالی است و عموماً برای حل این معادله‌ها از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود که بکارگیری انتگرالگیری عددی مستلزم تعریف شبکه نقاط گوس با وزنه‌های مربوط است. Chen و همکارش [۱۱] برای حل معادله غیرخطی برگر با ضریب‌های ویسکوزیته متفاوت از روش هیدرودینامیک ذره‌های هموار در یک و دوبعد استفاده کردند. در روش پیشنهادی ایشان اعمال مستقیم شرایط مرزی که یکی از مشکلات روش معمول هیدرودینامیک ذره‌ها هموار است، امکان‌پذیر است. Zerroukat و همکاران [۱۲] با استفاده از تقریب تابع پایه دایره‌ای<sup>۱۲</sup> و با توزیع نقاط تصادفی در صفحه دو بعدی، معادله جابجایی-پخش خطی را در حالت گذرا و بشکل صریح و ضمنی حل کرد. Boztosun و همکاران [۱۳] ضمن بررسی دقت و پایداری روش تابع پایه دایره‌ای، آنرا برای حل معادله‌های جابجایی-پخش بکار گرفتند. در این مقاله ایشان با بررسی مثالهایی به دقت و همچنین

1. Meshless Methods
2. Subdomains
3. Connectivity
4. Invertibility
5. Moving Least Square (MLS)
6. Diffuse Element
7. Element Free Galerkin (EFG)
8. Corrected Smooth Particle Hydrodynamics (CSPH)

9. Convection-Diffusion Problems
10. Point Collocation Method
11. Shallow Water Equations
12. Radial Basis Function (RBF)

$$\underline{U}_{,t} + \underline{A} \underline{U}_{,x} = \underline{S} \underline{U} \quad (2)$$

که در آن  $\underline{A} = \partial F / \partial \underline{U}$  ماتریس ژاکوبین و  $\underline{S}$  ماتریس ثابت سمت راست است. با به کارگیری گسسته سازی پسر در زمان برای معادله بالا داریم.

$$\underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n + \Delta t (\underline{A}^{n+1} \underline{U}_{,x}^{n+1} - \underline{S} \underline{U}^n) = 0 \quad (3)$$

با جایگزینی  $\underline{A}^n$  بجای  $\underline{A}^{n+1}$  به منظور خطی سازی، میزان باقیمانده در گام زمانی  $n+1$  به صورت زیر است.

$$\underline{R}^{n+1} = \underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n + \Delta t (\underline{A}^n \underline{U}_{,x}^{n+1} - \underline{S} \underline{U}^n) \neq 0 \quad (4)$$

تابع های حداقل مربعات گسسته برای کلیه نقاط داخل حوزه به صورت زیر هستند.

$$I(\underline{R}^{n+1}) = \sum_{i=1}^n \left[ \underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n + \Delta t (\underline{A}^n \underline{U}_{,x}^{n+1} - \underline{S} \underline{U}^n) \right]^2 \quad (5)$$

در صورتیکه مقادیرهای مجهول با مقادیرهای پارامترهای درون یابی شده به صورت زیر جایگزین شود.

$$\underline{U}^{n+1} = \underline{N}_i \underline{U}_i^{n+1} \quad (6)$$

و با مشتق گیری از مجموعه تابع های بالا به منظور حداقل سازی داریم.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (N + \Delta t \underline{A}^n N_{,x})^T \cdot (N + \Delta t \underline{A}^n N_{,x}) \underline{U}^{n+1} \\ & = \sum_{i=1}^n (N + \Delta t \underline{A}^n N_{,x})^T \cdot (I + \Delta t \underline{S}) \underline{U}^n \end{aligned} \quad (7)$$

با تفکیک ماتریس و بردار سمت راست از مجموعه معادله های مذکور دستگاه معادله های جبری بصورت زیر به دست می آید. در معادله بالا  $I$  ماتریس واحد است.

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{F} \quad (8)$$

$$k_{lm} =$$

$$\sum_{i=1}^{ne} (N_i + \Delta t \underline{A}^n N_{i,x})^T (N_m + \Delta t \underline{A}^n N_{m,x})_i \quad (9)$$

$$f_l = \sum_{i=1}^{ne} (N_i^l + \Delta t \underline{A}^n N_{i,x}^l)^T (I + \Delta t \underline{S}) (\underline{U}_i^n) \quad (10)$$

در معادله های بالا  $\underline{U}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  بردار مجهولات است.

کاهش زمان محاسبات در این روش پرداختند. Huerta و همکاران [۱۴] به بررسی پایداری روش بدون شبکه در مسایل زمان گذرا پرداختند. Park و همکارش [۱۵] حداقل مربعات پیوسته را که در گذشته توسط افشار [۱۶] در روش اجزای محدود برای حل مسائل جابجایی در حوزه سیالات ارایه شده بود بعنوان یک روش بدون شبکه ارایه نمود.

این مقاله با به کارگیری روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته<sup>۱</sup> به مراحل ساده تر و مفیدتری از گسسته سازی حوزه فیزیکی و معادله ی دیفرانسیل تاکید دارد. اگرچه حل دایمی برخی از انواع معادله های دیفرانسیل به وسیله روش مذکور توسط ارزانی و افشار [۱۷] ارایه شده است. اما بسط و توسعه مدل برای جریانات گذرای منتهی به حالت دایمی هدف این مقاله است. جریان روی سرریز سدها به زبان ریاضی با دو معادله های دیفرانسیلی که از معادله های پیوستگی و ممنوم در جریانات گذرا به دست می آیند بیان می شوند. ضمن اینکه روش پیشنهادی با حذف مراحل انتگرالگیری، مفهوم واقعی تری از روش بدون شبکه را به نمایش می گذارد.

## ۲- فرمولبندی روش حداقل مربعات گسسته

در این بخش حداقل مربعات متحرک برای تعیین مقادیرهای تابع های شکل و همچنین حداقل مربعات گسسته به منظور گسسته سازی معادله دیفرانسیل بررسی می شود. از آنجائی که حل معادله های دیفرانسیل هم در حالت دائمی و هم در حالت غیردایمی (گذرا) مطرح است، گسسته سازی زمانی به طور مستقل ارایه می شود.

۲-۱ گسسته سازی معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی به روش حداقل مربعات گسسته

شکل دیورجانس دستگاه معادله های دیفرانسیلی هذلولوی به صورت زیر بیان می شود.

$$\underline{U}_{,t} + \underline{F}_{,x} = \underline{S} \underline{U} \quad \Omega \quad (1)$$

در اینجا  $\underline{U}$  بردار مجهولات و  $\underline{F}$  بردار مقدارهای فلاکس که خود به صورت تابعی از  $\underline{U}$  است. شکل شبه خطی معادله بالا به صورت زیر است:

### 1. Discrete Least Square

$$B(x) = W(\Delta x)P \quad (19)$$

$$Pa = u = \sum_{k=1}^n N_k u_k \quad (20)$$

$$P(A^{-1}B u_k) = N_k u_k \quad (21)$$

حال می توان تابع شکل را بصورت زیر ارایه نمود.

$$N_k(x) = PA^{-1}B_k \quad (22)$$

همچنین در بسیاری از معادله های دیفرانسیلی تعیین مشتق یا مشتقات تابع های شکل ضروری است.

$$\frac{dN(x)}{dx} = \frac{dp}{dx} A^{-1}B + P \frac{d(A^{-1})}{dx} B + PA^{-1} \frac{dB}{dx} \quad (23)$$

### ۲-۲-۱ تابع های وزنی

نقطه مشترک در تمامی روشهای بدون شبکه تابع های وزنی یا به عبارتی تابع های پنجره ای<sup>۱</sup> هستند و ویژگی های اصلی آن دارا بودن مقدار غیر صفر در زیر حوزه و صفر در خارج از زیرحوزه است. از آنجایی که مقدارهای تابع های شکل در روشهای بدون شبکه به طور صریح مانند اجزای محدود وجود ندارد و به عبارتی تابع های شکل شرط دلتای کرونگر را ارضاء نمی کنند لذا استخراج مقدارهای تابع های شکل از روش های متفاوت و با انواع متفاوت تابع های وزنی انجام می شود. تابع های وزنی یا کرنلها شرایط زیر را دارند.

$$(1) \quad w(x-y, h) > 0 \quad \text{در داخل زیرحوزه}$$

$$(2) \quad w(x-y, h) = 0 \quad \text{در خارج از زیر حوزه ها}$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} w(x-y, h) d\Omega = 1 \quad \text{خاصیت نرمال به صورت}$$

$$(4) \quad s = \|x-y\| \quad \text{میزان تفاضل ها}$$

$$(5) \quad w(s, h) \rightarrow \delta(s)$$

با نزدیک شدن  $h$  به سمت صفر تابع وزنی به سمت دلتای دیراک میل می کند.

در صورت استفاده از حوزه اثر دایره ای، پارامتر  $s$  در بالا معرف شعاع تاثیر ( $r$ ) هر حوزه،  $w(r)$  تابع وزنی اسپلاین مرتبه سه،  $s_{\max}$  متناظر با مقدار  $h$  و  $r = s/s_{\max}$  در فرمولبندی کلی است.

رابطه ی زیر تابع وزنی اسپلاین مرتبه ی ۳ را نشان می دهد.

۲-۲ حداقل مربعات متحرک برای محاسبه مقدارهای تابع های شکل

این روش در حدود سال ۱۹۶۰ میلادی توسط Shepard به منظور دستیابی به تقریبهای با مرتبه پیوستگی بالا ارایه گردید. تقریب حداقل مربعات برای کلیه نقاط حوزه مسأله که تعیین مقدار مجهول در آنها با درونیابی مدنظر است به کار گرفته می شود. تابع تقریب به صورت زیر فرض می شود.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m P_i^T(x) a_i(x) \equiv P^T(x) a(x) \quad (11)$$

$a_i(x)$  بردار ضرائب تابع چندجمله ای و  $P^T(x)$  بردار متغیرهای چند جمله ای که در حالت کلی از هرم پاسکال به دست می آید. هدف در روش حداقل مربعات، حداقل سازی مجموع مربعات وزنی باقیمانده ها در کل نقاط داخل حوزه به صورت زیر است.

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n W_k (x-x_k) [u_k - P^T(x)a(x)]^2 \quad (12)$$

$n$  تعداد نقاط موجود در همسایگی  $x$  و داخل زیرحوزه به گونه ای که اندازه تابع وزنی در آن نقاط مخالف صفر است.

$$w(x_k - x) \neq 0$$

و  $u_k$  پارامتر گرهی  $u$  در  $x = x_k$  است. در این حالت تابع وزنی در نقطه  $x_k$  استوار می شود و در سایر نقاط زیرحوزه، ارزیابی می شود.

با مشتق گیری از تابع  $J(x)$  در معادله ی ۱۲ نسبت به  $a(x)$  به منظور کمینه سازی آن و با مرتب سازی داریم.

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \sum_{k=1}^n W_k (x-x_k) P(x) [u_k - P^T(x)a(x)] = 0 \quad (13)$$

به منظور ساده سازی فرمولبندی بردارها و ماتریسهای جدیدی به صورت زیر تعریف می شود.

$$a(x) = A^{-1}(x) \sum_{j=1}^n B_j(x) u_j \quad (14)$$

یا

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u_j \quad (15)$$

$$A(x) = \sum W_k (x-x_k) P(x_k) P^T(x_k) \quad (16)$$

$$B(x) = W_j (x-x_j) P(x_j) \quad (17)$$

در شکل ماتریسی معادله های مذکور این گونه هستند.

$$A(x) = PW(\Delta x)P^T \quad (18)$$

1. Weigthing Function, Window Function

(۲۳)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix}, \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g \partial z_b / \partial x & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$$

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{اگر } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3} r^3 & \text{اگر } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{اگر } r \geq 1 \end{cases}$$

## ۳- مثال عددی

بمنظور ارزیابی توانمندی روش پیشنهادی در این بخش نتیجه های تحلیل عددی جریان از روی سرریز سد با نتیجه های مربوط به مقدارهای سرعت و فشار که از مدل فیزیکی تهیه شده است، بررسی می شود. تابع وزنی به کارگرفته شده از نوع اسپلاین مرتبه ۳ و چندجمله ای مورد استفاده از مرتبه ۲ و به صورت  $p = (1, x)$  است. همچنین گسسته سازی زمانی به صورت پسر و همانند آنچه که در بخش ۱-۲ آمده است می باشد. لازم بذکر است که اعمال هر نوع شرایط مرزی در حداقل مربعات گسسته بصورت روش تاوانی (تابع جریمه) همانند آنچه که در بسیاری از روش های عددی مانند اجزای محدود مرسوم است، انجام می شود.

مسئله تحلیل جریان یک بعدی از روی سرریز سد

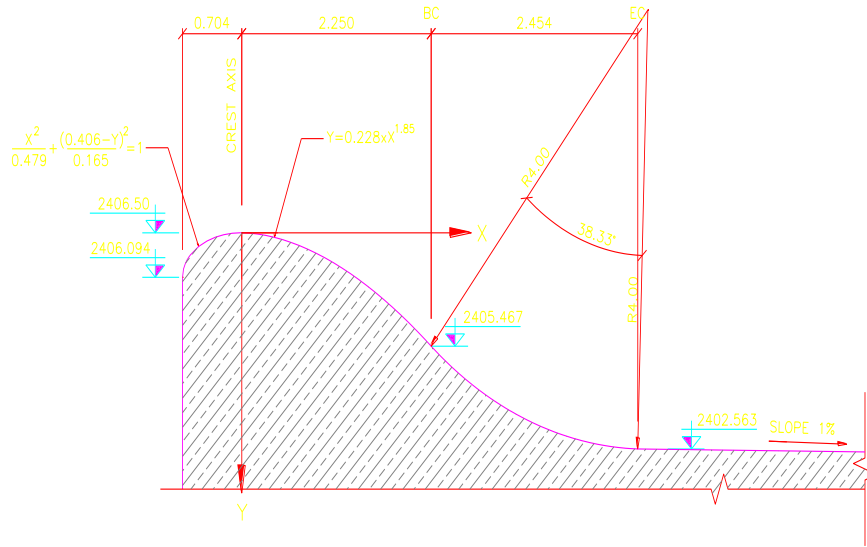
شکل عمومی معادله های آبهای کم عمق برای دستگاه معادله های دیفرانسیلی مربوط به معادله پیوستگی و ممنوم با حذف ترمهای مربوط به اثرهای تنشهای برشی، در شکل یک بعدی به صورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{bmatrix}_{,x} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \partial z_b / \partial x \end{bmatrix}$$

که در آن  $h$  و  $hu$  بترتیب معرف تراز آب و دبی در واحد عرض سرریز و  $\frac{\partial z_b}{\partial x}$  معرف شیب بستر هستند.

با توجه به فرمولبندی ارایه شده در بخش ۱-۲ مقدارهای ماتریس های  $\underline{A}$  و  $\underline{S}$  و بردار مجهولات  $\underline{U}$  برای این مسئله به صورت زیر هستند.

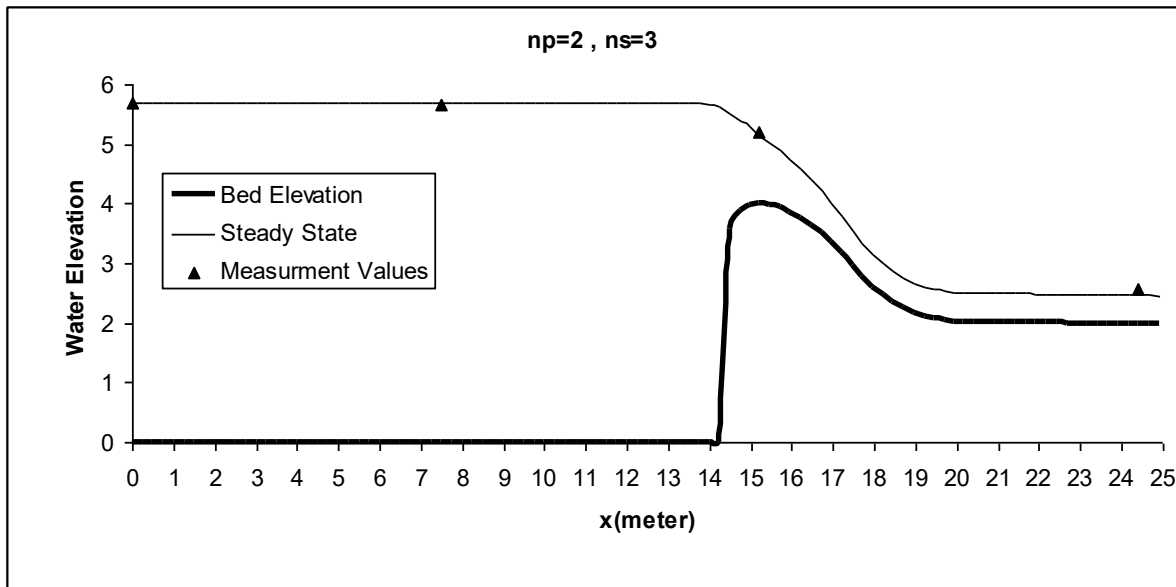
مشخصات عمومی سرریز در شکل ۱ نشان داده شده است. شکل های ۲ و ۳ نتایج مربوط به ارتفاع تراز آب و مقدار سرعت حاصل از مدل و حل عددی را نشان می دهد. همان طور که در شکل های مذکور مشاهده می شود، از آنجایی که کانال هدایت جریان در امتداد طولی سرریز سد نیست لذا عدم تقارن جریان نزدیک شونده تاثیر نسبی بر شرایط سینماتیکی و دینامیکی جریان داشته و به عنوان عاملی در ناهماهنگی نتیجه های تحلیل عددی و مدل به ویژه در مقدارهای مربوط به سرعت و به ویژه در محل تاج سرریز است. اندازه گیری های مربوط به سرعت در مدل فیزیکی مقدار میانگین سرعت در ترازهای ۰/۲ و ۰/۸ از سطح آزاد است. از آنجایی که نتیجه های مدل فیزیکی دو بعدی با مدل عددی یک بعدی مقایسه می شود لذا با توجه به عریض بودن سرریز (۲۰ متر) مقدارهای مربوط به تراز آب از خطای بمراتب کمتری در مقایسه با مقدارهای سرعت برخوردار است. همچنین اطلاعات مربوط به ارتفاع آب و سرعت در نقطه بعد از شوت مغایرت هایی را نشان می دهد که ناشی از هیدرودینامیک بودن فشار در محل بلافاصله بعد از تاج سرریز است. در استخراج معادله های میانگین عمقی از معادله های جامع ناویراستوکس توزیع فشار هیدرواستاتیک فرض شده است. معادله پیوستگی از مجموعه معادله های آبهای کم عمق مستقل از فشار است. اما معادله ی ممنوم (در جهت X) که اساسا معادله ای بر پایه تعادل نیرو هستند متاثر از میزان فشار هستند. لذا انتظار می رود که هیدرودینامیک بودن فشار در محل تاج سرریز منجر به بروز خطا در نتیجه های مربوط به دبی یا سرعت شود. در واقع افزایش بخش فشاری  $(p/\gamma)$  در معادله انرژی  $(z + p/\gamma + v^2/2g)$  با فرض مقدار ثابت برای Z که از معادله ی پیوستگی به دست می آید منجر به کاهش  $(v^2/2g)$  و در نتیجه کاهش سرعت می شود.



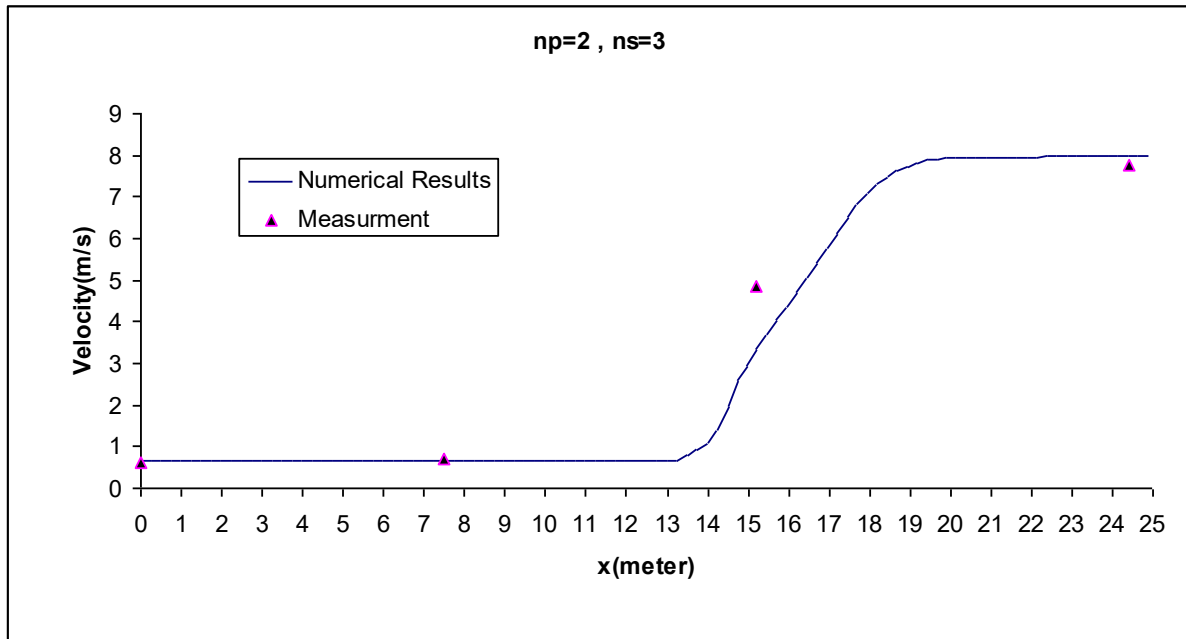
### CREST CURVE GEOMETRY

SCALE 1:50

شکل ۱ هندسه تاج و شوت سرریز سد



شکل ۲ مقایسه ی نتیجه های تراز بین مدل عددی و فیزیکی



شکل ۳ مقایسه نتیجه های سرعت آب بین مدل عددی و فیزیکی

#### ۴- نتیجه گیری

نسبت به روشهای متکی به شبکه می شود و از طرف دیگر براحتی می توان به پیوستگیهای مرتبه بالاتری برای تابع های شکل بازای چندجمله ای هایی با تعداد جمله ها کم دست یافت. این خصوصیت در برخی از مسایل می تواند مفید واقع شود و در برخی دیگر نیز مشکلاتی را به وجود می آورد. به عنوان مثال، در روش اجزای محدود گالرکین به علت پایین بودن مرتبه ی پیوستگی تابع شکل در گسسته سازی ترم پخش که در آن مشتق مرتبه دوم تابع شکل مدنظر است با مشتق گیری جزء به جزء از مرتبه ی مشتق کاسته و شکل ضعیف آن در معادله های اعمال می شود در حالی که مقادیرهای مشتقات مرتبه بالا در روش حداقل مربعات گسسته به صراحت عاید می شوند. بهر حال مهمترین مزایای این روش را به لحاظ عددی می توان در حذف مرحله های انتگرال گیری از روال محاسبه ماتریس های ضریب ها و همچنین پشتوانه بدون شبکه بودن آن در مفهوم واقعی دانست. این فرمولبندی با بررسی نتیجه های مدل عددی و فیزیکی جریان از روی سرریز سد در حالت گذرا درست یابی شده است. به لحاظ هیدرولیکی یکی از فرضیات اصلی در معادله های آبهای کم عمق وجود فشار به صورت هیدرواستاتیک یا نرم و هموار بودن خطوط جریان به ویژه برای خط جریان سطح آزاد است. این فرض برای بکارگیری معادله های آبهای کم عمق در جریان روی

بسیاری از روشهای بدون شبکه علیرغم نامگذاریشان برای حل معادله های انتگرال از انتگرالگیری عددی استفاده می کنند که نیازمند به معرفی نقاط گوس و وزنه های مربوط همراه با شبکه بندی است. رفع این مشکل و همچنین وجود برخی مزیتها در روشهای متکی به نقاط (بدون شبکه) انگیزه اصلی بکارگیری روش حداقل مربعات گسسته برای حل معادله های دیفرانسیل است. در این مقاله روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای حل معادله های جریان حاکم بر سرریز سدها معرفی شده است. حداقل مربعات در این روش در دو مرحله به کار گرفته شده است، در نخستین مرحله معادله ی دیفرانسیل به کمک نوع گسسته آن گسسته سازی و ماتریس ضریب های دستگاه معادله های جبری برحسب تابع های شکل استخراج می شود و در مرحله دوم برای به دست آوردن مقادیرهای تابع های شکل در هر نقطه فرضی در داخل حوزه حل از حداقل مربعات متحرک وزنی استفاده شده است. همانند کلیه روشهای بدون شبکه و برخلاف روش اجزای محدود تابع شکل و مشتقات آن به صورت صریح در فرمولبندی اعمال نمی شود، بلکه مقادیرهای تابع های شکل با به کارگیری حداقل مربعات متحرک وزنی برای کلیه نقاط داخل حوزه و نقاط مرزی به دست می آید. که این مسأله از یک طرف منجر به حجم عملیات بیشتری

های آبهای کم عمق امکان تحلیل یک بعدی جریان روی سرریز را میسر می نماید. که بلحاظ حجم و زمان محاسبات بسیار حائز اهمیت است. مقایسه نتایج حل مدل عددی و اندازه گیریهای انجام شده از مدل فیزیکی کارائی مناسب مدل عددی را برای تحلیل یک بعدی جریان از روی سرریز سد نشان می دهد.

سرریزهای با پاشنه به طور کامل قائم که منجر به خطوط جریان غیر هموار می شود یک فرض نادرست است و منجر به بروز خطا در نتایج مربوط به سرعت می شود. لذا استفاده از مدل معادله های آبهای کم عمق برای سرریزهایی که پاشنه آنها به صورت مورب است منجر به نتیجه های دقیق تری می شود. علیرغم مشکل مذکور استفاده از معادله

## ۵- مراجع

- 1) Arash Yavari, Ali Kaveh, Shahram Sarkani , Hosein Ali Rahimi Bondarabady Topological aspects of meshless methods and nodal ordering for meshless discretization; Int. J. Numer. Meth. Engrg. **52**,921-938 (2001).
- 2) B. Nayroles, G.Touzot and P.Villon; Generalizing the finite element method diffuse approximation and diffuse element; Coput. Mech. **10**,307-318 (1992).
- 3) T. Belytschko, L.Gu and Y.Y.Lu; Fracture and crack growth by element free Galerkin methods; Model. Simul.Mater. Sci. Engrg. **2**,519-534 (1994)
- 4) T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P.Krysl; Meshless methods : An overview and recent development; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **139**,3-47 (1996).
- 5) Javier Bonet, Sivakumar Kulasegaram; A simplified approach to enhance the performance of smooth particle hydrodynamics methods; Applied Mathematics and Computation **126**,133-155 (2002).
- 6) Javier Bonet, B. Hassani, L.-T. Lok, S. Kulasegaram; Corrected smooth particle hydrodynamics- a reproducing kernel meshless method for computational mechanics in UK – 5<sup>th</sup> ACME Annual Conference, (1997).
- 7) Yunhua. Luo, Ulrich Haussler-Combe; A generalized finite-difference method based on minimizing global residual; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **191**,1421-1438 (2002).
- 8) E. Onate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, C. Sacco; A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **139**,315-346 (1996).
- 9) E. Onate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor; A finite point method in computational mechanics applications to convective transport and fluid flow; Int. J. Numer. Meth.Engrg.Vol.39pp. 3839-3866 (1996).
- 10) Chongjiang Du; An element free galerki method for simulation of dtationary two dimensional shallow water flows in rivers; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **182**,89-107 (2000).
- 11) J.K. Chen, J.E. Beraun; A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **190**,225-239 (2000).
- 12) M. Zerroukat, K. Djidjeli and A. Charafi; Explicit and Implicit Meshless Methods for Linear Advection-Diffusion- type Partial Differential Equation; International Journal for Numerical Methods in Engrg. **48**,19-35 (2000).
- 13) I. Boztosun, A. Charafi; An Analysis of the Linear Advection-Diffusion Equation Using Mesh-free and Mesh-depended Methods; Engineering Analysis with Boundary Elements **26**,889-895 (2002).
- 14) Antonio Huerta, and Sonia Fernandez-Mendez; Time accurate consistently stabilized mesh-free methods for convection dominated problems; Int. J. Numer. Meth. Engrg. **56**,1225-1242 (2003).
- 15) Sang-Hoon Park and Sung-Lie Youn; The least-squares meshfree method; Int. J. Numer. Meth. Engrg. **52**,997-1012 (2001).
- 16) M. H. Afshar; Linear and quadratic least square finite element method for compressible and incompressible flows; Phd Thesis, Department of Civil Engineering, University college of Swansea, UK, (1992).
- 17) H. Arzani, M.H. Afshar, Solving Poisson's equations by the Discrete Least Square meshless method; Paper presented at 28<sup>th</sup> Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM28), Skiathos, Greece (2006).
- 18) M.H. Afshar, H. Arzani; Discrete Least Square meshless method for Solving Partial Differential Equations; Paper presented at 13<sup>th</sup> Conference on Finite Elements for Flow Problem, School of Engineering – University of Wales, Swansea- Wales-UK (2005).