Tech. Edu. J. 13(3): 660-671, Summer 2019

Technology of Education Journal

(TEJ)

Homepage: jte.sru.ac.ir

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Investigating junior high school students' procedural and structural concep-tion of algebraic expressions

F. Z. Heidari, N. Asghary*

Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran

Submitted: 09 April 2018
Reviewed: 15 May 2018
Revised: 28 September 2018
Accepted: 10 October 2018

KEYWORDS:
Algebra
Algebraic expressions
Procedural concept
Structural concept
Sfard's theortical framewrok

* Corresponding author
nas.asghari@iauctb.ac.ir

ABSTRACT

Background and Objectives: Many international studies have been done in order to trace the intellectual path of students in manipulation with the concept of variables and algebraic expressions, as well as to examine and specify their functional problems. However, despite the importance of these two concepts, comprehensive research has not been conducted in the seventh, eighth and ninth grades in Iran, and research has often focused on how to manipulate and write algebraic expressions. Due to the change in Iran's mathematics curriculum in 2009 and the consequent change in mathematics text-books, the need for a clear picture of students' understanding of these two con-cepts is doubled.Algebraic expressions are the important part of Algebra and its deep understanding is necessory for solving algebraic problems. The purpose of this study was to investigate grade 7th, 8th and 9th students' understanding of algebraic expressions.

Methods: 400 students were selected by multistage cluster sampling from 7th , 8th and 9th grade students in Tehran. A researcher-made test was designed and implemented. Out of 400 students, 15 students were selected and semi-structured interviews were conducted in order to clarify and interpret students' perceptions.

Findings: The results of the test and interviews showed that most students have a poor struc-tural understanding of algebraic expressions and they have understood them mere-ly procedurally. Increasing academic bases did not almost improve structural under-standing, but procedural understanding improves with increasing levels.

Conclusion: The results of this study showed that most students in algebraic expressions (sim-ple and complex) have a purely procedural understanding, which means that they have understood algebraic expressions as a set of algorithms and processes. As it turned out from the interviews, these people, when it is necessary to perform an operation on the algebraic expression and consider the algebraic expression as a whole, only memorize the steps as a parrot because they have no understanding of the whole structure of the algebraic expression; and they focus only on the steps within an algebraic expression. In complex algebraic expressions, compared to sim-ple algebraic expressions, the percentage of students who had a purely procedural understanding was reduced. The results of interviews with a number of students showed that this decrease was not due to an increase in students' structural under-standing, but for reasons such as ignoring the distributive action, not understanding algebraic expressions, not understanding the process in complex algebraic expres-sions.

NUMBER OF REFERENCES
30

NUMBER OF FIGURES
6

NUMBER OF TABLES
15

مقاله پژوهشی

بررسی درک رویه‌ای و ساختاری دانش‌آموزان دوره متوسطه اول در عبارت‌های جبری

فاطمه الزهرا حیدری، نسیم اصغری*

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

چکیده

پیشینه و اهداف: تحقیقات بین المللی بسیاری به منظور رد یابی مسیر فکری دانش‌آموزان در دست ورزی با مفهوم متغیر و عبارت‌های جبری و همچنین بررسی و تصریح مشکلات عملکردی آنان انجام شده است. اما علیرغم اهمیت این دو مفهوم، پژوهش جامعی در پایه‌های هفتم، هشتم و نهم در ایران صورت نگرفته است و پژوهش های انجام شده اغلب بر نحوه دستکاری و نوشتن عبارت‌های جبری متمرکز شده اند. با توجه به تغییر برنامه درسی ریاضی ایران در سال ۲۰۰۹ و به تبع آن تغییر کتب درسی ریاضی، لزوم داشتن تصویری روشن از درک دانش‌آموزان از این دو مفهوم دوچندان می شود. عبارت‌های جبری بخش مهمی از جبر است و درک عمیق این مفهوم و کسب مهارت دست ورزی با عبارت‌های جبری بستر لازم برای حل مسائل جبری را ایجاد می‌کند. هدف از پژوهش حاضر، بررسی درک دانش‌آموزان پایه‌های تحصیلی هفتم، هشتم و نهم در عبارت‌های جبری است.

روش‌ها: تعداد ۴۰۰ نفر از دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم شهر تهران به روش نمونه‌گیری خوشه ای چند مرحله‌ای انتخاب شدند. آزمونی محقق ساخته طراحی و اجرا گردید. پس از تجزیه و تحلیل داده‌ها، به منظور تصریح و تفسیر درک دانش‌آموزان با تعداد ۱۵ نفر از آنها مصاحبه نیمه ساختاری انجام گرفت.

یافته‌ها: نتایج حاصل از این آزمون و مصاحبه نشان داد که اکثر دانش‌آموزان درک ساختاری ضعیفی از عبارت‌های جبری دارند و آن ها را صرفا به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند. افزایش پایه‌های تحصیلی، تقریبا در ارتقای درک ساختاری تاثیری نداشته است، اما درک رویه‌ای با افزایش پایه‌ها ارتقا می یابد.

نتیجه‌گیری: نتایج این تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان در عبارت‌های جبری (ساده و پیچیده) درک صرفا رویه‌ای دارند به این معنی که عبارت‌های جبری را به صورت مجموعه‌ای از الگوریتم‌ها و فرایندها درک کرده اند. همانطور که از مصاحبه‌ها مشخص شد، این افراد در مواقعی که احتیاج است عملیاتی روی عبارت جبری انجام شود و عبارت جبری را به عنوان یک کل در نظر بگیرند، صرفا مراحل کار را طوطی وار حفظ می‌کنند چرا که هیچ نوع درکی از ساختارکل عبارت جبری ندارند و فقط به مراحل درون یک عبارت جبری تمرکز دارند. در عبارت‌های جبری پیچیده نسبت به عبارت‌های جبری ساده، درصد فراوانی دانش‌آموزانی که درک صرفا رویه‌ای داشتند، کاهش پیدا کرده بود. نتایج مصاحبه‌ها با تعدادی از دانش‌آموزان نشان داد که این کاهش، به خاطر افزایش درک ساختاری در دانش‌آموزان نبود بلکه به دلایلی چون نادیده گرفتن عمل توزیع پذیری، درک نکردن عبارت‌های جبری، درک نکردن فرایند در عبارت جبری پیچیده بود.

دریافت: ۲۰ فروردین ۱۳۹۷
داوری: ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۷
اصلاح: ۰۶ مهر ۱۳۹۷
پذیرش: ۱۸ مهر ۱۳۹۷

واژگان کلیدی:
جبر
عبارت‌های جبری
مفهوم رویه‌ای
مفهوم ساختاری
چهارچوب نظری اسفارد

*نویسنده مسئول
nas.asghari@iauctb.ac.ir

مقدمه

جبر دروازه ورود به ریاضیات مدرسه‌ای است و برای ورود به ریاضیات سطح بالاتر و فرصت های شغلی و آموزشی آینده، ضروری است[۱] .برای بسیاری از دانش‌آموزان در سراسر دنیا، با شروع جبر، سختی ریاضی بیشتر شده و آغازی برای جدا شدن آن‌ها از ریاضی می شود[۲]. کیه ران جبر را به عنوان شاخه ای از ریاضیات معرفی می‌کند که با نمادی سازی و تعمیم روابط عددی و ساختارهای ریاضی و با عمل روی این ساختارها سروکار دارد[۳]. بل نیز جبر را به عنوان وسیله ای برای تعمیم، روابط و فرمول ها، حل مسائل، مشخص کردن مجهولات و حل معادلات توصیف کرده است[۴].

کاپوت ۵ جنبه از جبر را شناسایی کرد: جبر به عنوان تعمیم سازی و صورت بندی الگوها، جبر به عنوان دست ورزی های هدایت شده نحوی نمادها ، جبر به عنوان مطالعه ساختارها، مطالعه توابع، روابط، تغییرات مشترک و جبر به عنوان زبان مدل سازی[۵،۶]. همانطور که مشخص است عبارت‌های جبری و عملیات و دست ورزی روی آن ها در گروه دوم دسته‌بندی کاپوت قرار دارند و درک عبارت های جبری برای دست‌ورزی روی آن ها ضروری و لازم است.

فراخوان جبر برای همه، آموزشگران ریاضی را به بازبینی روش‌هایی که به یادگیری جبر کمک می‌کند، تشویق می کند و مشکلات دانش‌آموزان را ناشی از نحوه آموزش جبر می داند[۲]. عبارت‌های جبری بخش مهمی ازجبر است و یاددهی و یادگیری آن از اهمیت بالایی برخوردار است. درک عمیق این مفهوم و کسب مهارت دست ورزی با عبارت‌های جبری بستر لازم برای حل مسائل جبری را ایجاد می‌کند. از سوی دیگر با توجه به اینکه عبارت‌های جبری یکی از مفاهیمی است که دارای ماهیت دوگانه فرایند- شیئ [۷]است، درنتیجه نحوه یاددهی آن توجه ویژه‌ای را می طلبد.

دانش آموزان اغلب در یادگیری جبر و به خصوص عبارت‌های جبری، هدف از یادگیری ان را نمی دانند و در صورت بندی یک مسئله با نماد های جبری و نوشتن آن به صورت یک عبارت جبری دچار مشکل می‌شوند. با توجه به تحقیقات انجام شده، به چند دلیل دانش‌آموزان در عبارت‌های جبری مشکل دارند: اول اینکه دانش‌آموزان اغلب معانی مختلف و کاربرد های متفاوت متغیر را که جزئی از عبارت‌های جبری است، را درک نکرده‌اند[۸،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳].

کوچمن نشان داد که درصد خیلی کمی از دانش‌آموزان ۱۳ تا ۱۵ ساله، قادر هستند که حروف را به عنوان عدد تعمیم یافته و یا حتی تعداد بسیار اندکی، حروف را به عنوان متغیر درک کنند. بیشتر دانش‌آموزان یا حروف به عنوان اشیا محسوس رفتار می‌کنند و یا در مواقعی هم، حروف را نادیده می‌گیرند[۸].

دوم اینکه دانش‌آموزان درک مفهومی از جمله و معنی عبارت‌ها ندارند[۹،۱۴،۱۵،۱۶،۱۷،۱۸]. و در نهایت دانش‌آموزان در قواعد نحوی عبارت‌های جبری دچار مشکل هستند[۹،۱۰،۲۰]. برای مثال اغلب دانش‌آموزان تلاش می کنند عبارت جبری $30x-5$ را به صورت $25x$ ساده کنند[۲۱،۲۲].

بنا بر ادعای اسفارد و لینچوسکی، دوگانگی فرایند – شیئ عبارت‌های جبری، هم زمان با ایده به کار رفتن حروف به عنوان اعداد نامعین به ریاضی دانان تحمیل شد[۷]. در تئوری دوگانگی فرایند- شیئ، ابتدا مفهوم عملیاتی مفاهیم ریاضی (مفاهیم مبتنی بر فرایند) ایجاد می‌شود و سپس با فشرده سازی فرایند، به شیئ ریاضی تبدیل می‌شود[۲۳].

تحقیقات بین المللی بسیاری به منظور رد یابی مسیر فکری دانش‌آموزان در دست ورزی با مفهوم متغیر و عبارت‌های جبری و همچنین بررسی و تصریح مشکلات عملکردی آنان انجام شده است. اما علیرغم اهمیت این دو مفهوم، پژوهش جامعی در پایه‌های هفتم، هشتم و نهم در ایران صورت نگرفته است و پژوهش های انجام شده اغلب بر نحوه دستکاری و نوشتن عبارت‌های جبری متمرکز شده اند. با توجه به تغییر برنامه درسی ریاضی ایران در سال ۲۰۰۹ و به تبع آن تغییر کتب درسی ریاضی، لزوم داشتن تصویری روشن از درک دانش‌آموزان از این دو مفهوم دوچندان می شود. این پژوهش از آن جهت نو پا است که بر نحوه تفکر دانش‌آموزان در عبارت‌های جبری بر اساس تئوری اسفارد [۲۶] متمرکز می شود.

هدف از پژوهش حاضر، بررسی درک دانش آموزان پایه‌های تحصیلی هفتم، هشتم و نهم در عبارت های جبری بر اساس تئوری اسفارد[۲۶] است. برای این منظور سوال و فرضیه های پژوهش به صورت زیر طراحی شدند:

سوال پژوهش: درک دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم در عبارتهای جبری چگونه است؟ آیا با ارتقاء پایه تحصیلی دانش‌آموزان، تغییری در نوع درک دانش‌آموزان اتفاق می‌افتد؟

فرضیه اصلی پژوهش: دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم عبارت‌های جبری ساده و پیچیده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه ۱: دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم عبارت‌های جبری ساده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه فرعی ۱-۱: دانش‌آموزان پایه هفتم عبارت‌های جبری ساده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه فرعی۲-۱: دانش‌آموزان پایه هشتم عبارت‌های جبری ساده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه فرعی۳-۱: دانش‌آموزان پایه نهم عبارت‌های جبری ساده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه ۲: دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم عبارت‌های جبری پیچیده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه فرعی ۲-۱: دانش‌آموزان پایه هفتم عبارت‌های جبری پیچیده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه فرعی ۲- ۲: دانش‌آموزان پایه هشتم عبارت‌های جبری پیچیده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

فرضیه فرعی۲-۳: دانش‌آموزان پایه نهم عبارت‌های جبری پیچیده را به صورت رویه‌ای درک می‌کنند.

مبانی نظری

با توجه به تفسیرهای متفاوتی که افراد از مفاهیم ریاضی دارند، میتوان نتیجه گرفت که مفاهیم مجرد ریاضی می‌توانند به دو صورت درک شوند: رویه‌ای و ساختاری. در حقیقت این دو مکمل هم هستند و یک دوگانگی ذاتی فرایند- شیئ در بیشتر مفاهیم ریاضی وجود دارد بنابراین استفاده از چهارچوب نظری اسفارد برای بررسی درک رویه‌ای و ساختاری دانش‌آموزان در عبارت‌های عددی و جبری، مفید خواهد بود.

تئوری شیئ انگاری اسفارد

اسفارد بین دو مفهوم عملیاتی و ساختاری یک مفهوم ریاضی، تفاوت قائل می‌شود. او بیان می‌کند که اگر فردی یک مفهوم را به عنوان یک فرایند ببیند، به این معنی است که او با جزئیات سروکار دارد که این را مفهوم عملیاتی نامید و اگر فردی یک مفهوم را به عنوان یک وجود و شیئ ریاضی ببیند، به این معنا است که او می تواند با آن وجود، به عنوان یک کل و یک شیئ رفتار کند و آن را دستکاری کند بدون اینکه به جزئیات توجه داشته باشد، که این همان مفهوم ساختاری است. بنابراین از نظر اسفارد، مفهوم عملیاتی فرایندی پویا است که جزئیات مورد توجه قرار میگیرند اما مفهوم ساختاری، ساکن و فشرده دیده می‌شوند. همچنین او ادعا می‌کند که این دو مفهوم دو روی یک سکه می باشند به این معنا که مفهوم عملیاتی و مفهوم ساختاری دو وجه مکمل و جدایی ناپذیر یک مفهوم هستند.

دوگانگی فرایند- شیئ برای اکثر مفاهیم ریاضی وجود دارد، هم برای ساخت مفاهیم و هم برای یادگیری هر مفهوم توجه به دوگانگی فرایند- شیئ ضروری است. امروزه بسیاری از پیشکسوتان در آموزش ریاضی، معتقدند که باید یک توازن بین هر دو درک مفهومی و رویه‌ای در تمام حوزه‌های ریاضیات به خصوص در حوزه جبر باشد[۲۴،۲۵]. به طوری‌که در این زمینه، اسفارد بیان می‌کند که فرایندها معمولا روی یک یا مجموعه ای از اشیا انجام می‌شود که این اشیا خودشان از فرایندهایی در ریاضیات حاصل می‌شوند که در ذهن افراد به عنوان یک شیئ، فشرده

شده اند. اسفارد بیان می‌کند که مرحله شیئ انگاری و درک ساختاری برای درک فرایندهای پیچیده‌تر و سطح بالاتر ضروری است.

از آنجا که مفهوم‌های رویه‌ای و ساختاری هر دو نقش مهم و حیاتی در فعالیت‌های آموزش و یادگیری مفاهیم ریاضی، را ایفا می‌کند بنابراین اسفارد مفاهیم عملیاتی و ساختاری را به صورت جدول ۱ توصیف می‌کند[۲۶].

اسفارد بیان می‌کند که مفهوم رویه‌ای همیشه اولین قدم برای فراگیری و ساخت یک مفهوم ریاضی است و مفهوم رویه‌ای بر مفهوم ساختاری مقدم است هدف از تئوری شیئ انگاری اسفارد عبور از یک سطح ساده (عملیاتی) به یک سطح پیچیده (ساختاری) است که این عمل بر پایه مکانیزم « شیئ انگاری» از فرایند به یک «کل ایستای فشرده» می‌باشد. اسفارد از کلمه شیئ انگاری برای توصیف لحظه‌ای استفاده می‌کند که فرد از درک فرایند به درک شیئ انتقال می‌یابد و در آن لحظه یک درک مفهومی و ایستا از یک شیئ ریاضی برای او شکل می‌گیرد. برای مثال وقتی فرد از فرایند تقسیم ۵ به ۱۲ قادر است به ۱۲.۵ به عنوان یک شیئ ریاضی (عدد گویا) برسد، آن لحظه شیئ انگاری اتفاق افتاده است. اسفارد در تئوری شیئ انگاری برای عبور از مفهوم عملیاتی به ساختاری به سه مرحله اشاره دارد:

مرحله درونی سازی، مرحله فشرده سازی، مرحله شیئ انگاری.

او در این مورد بیان می‌کند که ابتدا باید یک فرایند روی اشیا آشنا انجام شود (درونی سازی)، سپس به تدریج ایده تبدیل این فرایند به یک وجود مستقل حادث می شود (مرحله فشرده سازی) و در نهایت فرد توانایی این را پیدا می‌کند که آن را به عنوان یک کل و یک شیئ یکپارچه ببینید (شیئ انگاری).

چارچوب نظری اسفارد به نام نظریه شیئ انگاری مفاهیم به عنوان ابزاری برای تجزیه و تحلیل توسعه مفاهیم گوناگون ریاضی، بخصوص مفهوم تابع مورد توجه قرار گرفته است. اسفارد با ارائه پرسشنامه‌ای که حاوی دو مفهوم از تابع بود، به دانش‌آموزان به این نتیجه رسید که آنها بیشتر تمایل دارند تعریف تابع را به صورت عملیاتی بدانند تا ساختاری در حالی‌که ساختار کتاب های درسی آنها تابع را به صورت ساختاری آموزش داده است[۷].

جدول ۱: توصیف مفهوم عملیاتی و مفهوم ساختاری[۲۶]

Table 1: Operational and structural conception

	Operational conception	Structural conception
General characteristic	entity Amathematical is conceived as a product of a certain process or is identified with the process itself	A mathematical entity is conceived as a atatic structure- as if it was a real object
Internal representations	Is supported by verbal representations	Is supported by visual imagery
Its place in concept development	Develops at the first stages of concept formation	Evolves from the operational conception
Its role in cognitive processes	Is necessary, but not sufficient, for effective problem- solving& learning	Facilitates all the cognitive process(learning problem- solving)

مدلی برای مفهوم سازی فعالیت‌های جبری

کیه ران یک مدل برای فعالیت‌های جبر مدرسه ایجاد کرد که شامل۳ دسته می‌باشد: فعالیت‌های تعمیمی، فعالیت های انتقالی و فعالیت‌های فراپایه [۲۷،۲۸].

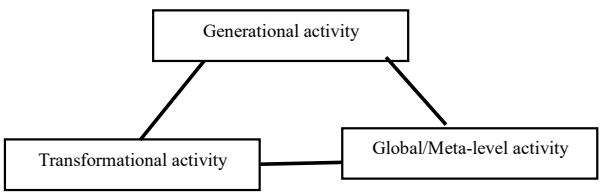
این مدل به طور خلاصه به مدل GTG معروف است (شکل۱)

فعالیت‌های تعمیم در جبر شامل شکل‌دهی عبارات و معادلات که به نوعی اشیا جبری محسوب می‌شوند، هستند. بیشتر معانی که برای اشیا جبری ساخته می‌شوند، در قالب فعالیت‌های تعمیمی شکل می‌گیرد. بنابراین به همان اندازه که این فعالیت‌ها، با متغیرها، مجهولات و تساوی‌ها سرو کار دارند، این فعالیت‌ها می‌توانند آغاز کننده مفاهیمی باشند که راه حل یک معادله را می‌سازند. واضح است معانی ای را که دانش‌آموزان برای مفاهیمی چون متغیر، برای خود می سارند بستگی به زمینه جبری که آنها تجربه کرده‌اند دارد که معمولا از چهارچوب معادلات چند جمله‌ای یا چهارچوب تابع نشات می‌گیرد. بنا به رادفورد نقش جبر در فعالیت‌های تعمیمی، به عنوان یک زبان برای بیان معنی است[۲۹].

نوع دوم از فعالیت‌های جبر، فعالیت‌های انتقالی است (که بعضی‌ها آن را فعالیت‌های مبتنی بر قوانین نیز نامیده‌اند) که شامل جمع کردن جملات متشابه، فاکتورگیری، بسط دادن، حل معادله و نامعادله، ساده کردن عبارت‌ها، جایگزینی مقدار عددی در عبارت‌ها و کارکردن با عبارت‌های هم ارز و معادلات است. نکته قابل توجه در این نوع فعالیت این است که این فعالیت مربوط به تغییر شکل نمادین از یک عبارت یا معادله است به طوری‌که هم ارز باقی بماند. فعالیت‌های انتقالی فقط مبتنی بر مهارت نیستند بلکه به طور گسترده تر میتواند شامل عناصر مفهومی- تئوریکی نیز باشند بخصوص در طول دوره ای که انتقال (تبدیل) خاصی فرا گرفته می‌شود[۳۰].

و در نهایت، دسته سوم فعالیت‌های فرا پایه هستند که در این فعالیت‌ها، از جبر به عنوان ابزار استفاده می‌شود و علت نامگذاری این فعالیت به فراپایه به این دلیل نیست که با فعالیت‌های ریاضی فاصله دارد بلکه به این دلیل است که این فعالیت‌ها فرایندهایی کلی ریاضی را ارائه می‌دهند. همچنین این فعالیت‌ها زمینه، هدف و انگیزه ای را برای درگیر شدن در فعالیت‌های تعمیمی و انتقالی ایجاد می کنند. این فعالیت‌ها شامل: حل مسئله، مدل سازی، کار با الگوها، اثبات، تائید، حدس زدن و.. می‌باشد.

تمام این فعالیت‌های سه گانه، فعالیت‌های ریاضی را به طور کل و به طور خاص فعالیت‌های جبری را احاطه کرده‌اند و بنابراین در نهایت برای ساخت و کار با فرایندها و اشیا جبری مورد استفاده قرار می‌گیرند.



شکل ۱: مدل GTG برای مفهوم سازی فعالیت‌های جبری

Fig. 1: GTG model for conceptualizing algebraic activity

روش شناسی

پژوهش حاضر به صورت ترکیبی انجام شده است. جامعه آماری این مطالعه، تمام دانش‌آموزان دختر دوره متوسطه اول شهر تهران بود. گروه نمونه شامل ۴۰۰ دانش آموز دختر بودند که با روش نمونه‌گیری خوشه‌ای چند مرحله‌ای انتخاب شدند. شهر تهران به پنج خوشه شمال، جنوب،شرق، غرب و مرکز تقسیم شد. سپس از هر خوشه یک منطقه به تصادف انتخاب و از هر منطقه یک مدرسه دخترانه انتخاب شد. در آخر از هر مدرسه دانش‌آموزانی از پایه‌های هفتم، هشتم و نهم به تصادف انتخاب شدند و نمونه مورد نظر شکل گرفت.

برای پاسخ به سوال پژوهش، در مرحله اول از ابزار آزمون کتبی محقق ساخته استفاده شد. هدف از آزمون آزمون کتبی محقق ساخته، تحت عنوان «آزمون عبارت جبری»، ارزشیابی درک دانش‌آموزان پایه‌های تحصیلی هفتم، هشتم و نهم از عبارت‌های جبری است. این آزمون محقق ساخته، شامل ۲ تکلیف بود که هر تکلیف، به صورت توصیف یک موقعیت بیان شده بود و سوال هر تکلیف، به صورت ۴ گزینه‌ای طراحی شد و دانش‌آموزان بر اساس درک خودشان از عبارت‌های جبری، گزینه مورد نظر را انتخاب می‌کردند.

آزمون عبارت جبری، از نظر روایی و پایایی مورد بررسی قرار گرفت. روایی آزمون، از نظر متخصصان آموزش ریاضی داخلی و خارجی (کریشنر، اسفارد)، معلمان ریاضی و اساتید ریاضی بررسی شد و مورد تائید قرار گرفت. پایایی آزمون به روش همسانی درونی، مورد بررسی قرار گرفت و با بدست آوردن ضریب آلفای مور تائید قرار گرفت.

داده‌های حاصل از آزمون کتبی با آمار توصیفی تجزیه و تحلیل شد. در مرحله دوم، از بین ۴۰۰ دانش آموز که در آزمون کتبی شرکت کرده بودند، تعداد ۱۵ نفر با توجه به نوع پاسخ هایشان انتخاب و با انها مصاحبه‌های نیمه ساختاری انجام شد. داده‌های حاصل از این مصاحبه‌ها با استفاده از چهارچوب نظری اسفارد مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در پژوهش حاضر، مصاحبه نیمه ساختار یافته ابزار بسیار خوبی بود که مکمل آزمون‌های کتبی می‌باشد و نقاط تاریکی که در مسیر تفکر و در ذهن دانش‌آموزان بودو در ازمون کتبی به درستی روشن نشده بود را رد یابی کرد. در واقع برای درک عمیق‌تر از «چرایی» پاسخ‌های دانش‌آموزان به سوالات آزمون های کتبی، مورد استفاده قرار گرفت.

آزمون محقق ساخته

این آزمون شامل دو تکلیف و به صورت سوال تستی چهار گزینه‌ای بود. در هر تکلیف، گزینه‌های ۱ تا ۴ بیانگر نوعی از درک دانش‌آموزان بودند که در ذیل آورده شده است:

گزینه ۱ نشان می‌دهد که دانش‌آموز، درکی از عبارت‌های جبری نداشته و آن را به صورت یک رشته بی‌معنی از اعداد و حروف می‌داند و یا با یادگیری طوطی وار، بدون داشتن درکی از عبارت‌های جبری، آنها را به کار می‌برند.

گزینه ۲ نشان می‌دهد که دانش‌آموز، عبارتهای جبری را فقط به صورت یک فرایند معین و مشخص می‌داند که این دسته از دانش‌آموزان، فقط درک رویه‌ای از عبارت‌های جبری دارند.

گزینه ۳ نشان می‌دهد که دانش‌آموز، کل یک عبارت جبری را به عنوان یک شیئ ریاضی می‌داند و می‌تواند با ان مانند یک عدد رفتار کند، بنابراین درک صرفا ساختاری از عبارت‌های جبری دارند.

گزینه ۴ نشان می‌دهد که دانش‌آموز ، که هر دو درک رویه‌ای و ساختاری را در عبارت‌های جبری هم زمان دارد و در هر زمان در صورت نیاز، عبارت‌های جبری را به صورت رویه‌ای یا ساختاری می‌بینند. بنابراین این۴ حالت مختلف از درک عبارت های جبری در دانش‌آموزان با این آزمون، ارزشیابی می‌شود.

داده‌های حاصل از آزمون کتبی با آمار توصیفی تجزیه و تحلیل شد. از بین ۴۰۰ دانش‌آموز که در آزمون کتبی شرکت کرده بودند، تعداد ۱۵ نفر با توجه به نوع پاسخ هایشان انتخاب و با انها مصاحبه های نیمه ساختاری انجام شد. داده های حاصل از این مصاحبه ها با استفاده از چهارچوب نظری اسفارد مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در پژوهش حاضر، مصاحبه نیمه ساختار یافته ابزار بسیار خوبی بود که مکمل آزمون‌های کتبی می‌باشد و نقاط تاریکی که در مسیر تفکر و در ذهن دانش‌آموزان بود و در ازمون کتبی به درستی روشن نشده بود را رد یابی کرد. درواقع برای درک عمیق‌تر از «چرایی» پاسخ‌های دانش‌آموزان به سوالات آزمون‌های کتبی، مورد استفاده قرار گرفت

در تکلیف ۱، آزمون عبارت جبری، از یک عبارت جبری ساده و در تکلیف ۲ از عبارت چبری پیچیده استفاده شده بود. منظور از عبارت جبری ساده، عبارت‌هایی به صورت کلی $ax+b$ می‌باشد و منظور از عبارت جبری پیچیده، عبارت‌هایی است که در آن ها پرانتز وجود دارد و تعداد عملگرهای بیشتری استفاده شده است.

کدگذاری

در آزمون جبری پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس درک آنها از عبارت‌های جبری و پاسخ آنها در هر تکلیف، کدگذاری شد.

برای هر دانش آموز با توجه با پاسخ‌هایشان در هر دو فعالیت، یک کد دو رقمی در نظر گرفته شد. رقم اول این کد، مربوط به گزینه پاسخ آنها به تکلیف اول و رقم دوم (رقم سمت راست) مربوط به گزینه پاسخ دانش‌آموزان به تکلیف دوم می‌باشد. برای مثال دانش‌آموزی که کد ۱۲ گرفته است به این معنی است که در تکلیف اول گزینه ۱ و در تکلیف دوم گزینه ۲ را انتخاب کرده است. بنابراین هر یک از ارقام این کدها می‌تواند از ۱ تا ۴، بسته به انتخاب گزینه‌های دانش‌آموزان در هر تکلیف، باشد.

یافته‌های پژوهش و تحلیل

یافته‌های مربوط به تکلیف ۱

در این تکلیف (پیوست ۱)، دو نوع توصیف برای عبارت جبری ساده $3X-1$ ارائه شده است و از دانش‌آموزان خواسته شده است که توصیف درست از دیدگاه خودشان را مشخص کنند. بنابراین جواب‌های آنها، نشان دهنده ساخت ذهنی دانش‌آموزان در مورد به عبارت جبری $3X-1$ بود.

جدول ۲ و شکل۲، درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هفتم، هشتم

جدول ۲: درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان هفتم، هشتم و نهم به فعالیت ۱ آزمون عبارت جبری

Table 2: Percentages of 7th, 8th and 9th students' answers to task 1of algebraic expression test

	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4
7th grade	5%	39%	17%	17%
8th grade	4%	52%	9%	26%
9th grade	2%	57%	10%	19%

و نهم به تکلیف ۱ آزمون عبارت جبری را نشان می‌دهند.

همانطور که از شکل ۲ مشخص است، در هر پایه تحصیلی، بیشتر دانش‌آموزان نسبت به عبارت جبری ساده، گزینه ۲ را انتخاب کرده بودند، به این معنا که نسبت به عبارت جبری ساده، درک صرفا رویه‌ای داشتند و درصد این گروه از افراد، با افزایش پایه تحصیلی، نیز افزایش پیدا کرده است (در پایه هفتم ۳۹٪، در پایه هشتم ۵۲٪و در پایه نهم ۵۷٪). همچنین جدول شکل ۲ نشان می‌دهد که درصد دانش‌آموزانی که درک دوگانه رویه‌ای – ساختاری نسبت به عبارت جبری ساده داشته‌اند نیز از پایه هفتم به هشتم افزایش یافته است (در پایه هفتم ۱۷٪ و در پایه هشتم ۲۶٪) ولی از پایه هشتم به نهم، با کاهش روبرو شده است (درپایه هشتم ۲۶٪ و در پایه نهم ۱۹٪) این گروه از دانش‌آموزان، افرادی هستند که در یک لحظه، نسبت به عبارت جبری ساده، هر دو درک رویه‌ای و ساختاری را دارند و در صورت نیاز، از هر کدام استفاده می‌کنند.

همچنین برای درک عمیق‌تر پاسخ‌های دانش‌آموزان، محقق، با تعدادی از دانش‌آموزان مصاحبه های انجام داد، در زیر قسمتی از مصاحبه با دانش‌آموزی که گزینه ۲ را انتخاب کرده، آمده است:

م- *چرا این گزینه را انتخاب کردی؟*

د-*خوب وقتی علامتی بین X و ۳ نیست یعنی ضرب است پس ۳ در X ضرب می‌شود و حاصل را از ۱ کم می‌کنیم*

م-*خوب X چیست؟*

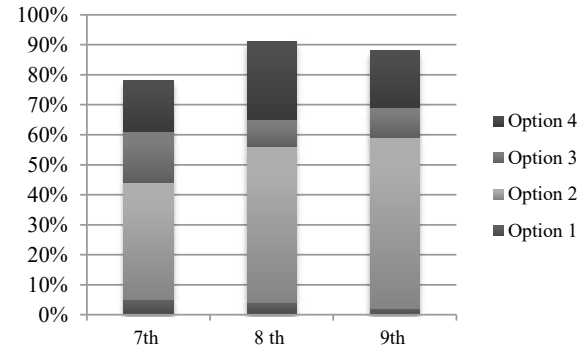
د- *عددی است که مجهوله، مقدارش را نمی‌دانیم. یعنی ۳ ضربدر یک عدد مجهول، بعد جواب را از ۱ کم می‌کنیم*

با توجه به مصاحبه می‌توان چنین استنباط کرده که این گروه از دانش‌آموزان یک عبارت جبری را مجموعه ای فرایندها و الگوریتم‌ها می‌دانند، بنابراین در مواقعی که احتیاج است عملیاتی روی عبارت جبری انجام شود و عبارت جبری را به عنوان یک کل در نظر بگیرند، صرفا مراحل کار را طوطی وار حفظ می‌کنند چرا که هیچ نوع درکی از ساختارکل عبارت جبری ندارند و فقط به مراحل درون یک عبارت جبری تمرکز دارند. شکل ۳، نمونه‌هایی از دلایل دانش‌آموزان مختلف، برای انتخاب گزینه ۲ را نشان می‌دهد.

همچنین، در زیر قسمتی از مصاحبه با دانش‌آموزی که گزینه ۴ را انتخاب کرده، نیزآمده است:

م- *چرا این گزینه را انتخاب کردی؟*

د- *سمانه که کاملا درست گفته زیرا X که هر عددی باشد را در ۳ ضرب*



شکل ۲: نمودارردصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان هفتم، هشتم و نهم به فعالیت ۱ آزمون عبارت جبری

Fig. 2: Frequency percentages of 7th, 8th and 9th students' answers to task 1of algebraic expression test

می‌کنیم و حاصل را از ۱ کم می‌کنیم. فاطمه هم درست گفته زیرا اگر X را داشته باشیم و فرایند را انجام دهیم، حاصل این عبارت یک عدد می‌شود که می‌توانیم تمام عملیات ریاضی را روی آن انجام دهیم.

شکل ۴ نمونه‌ای از دلایل دانش‌آموزی برای انتخاب گزینه ۴ را نشان می‌دهد.

پاسخ به فرضیه‌های فرعی ۱-۱و ۲-۱ و ۳-۱

فرضیه فرعی۱- ۱: دانش‌آموزان پایه هفتم، عبارت جبری ساده را به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند.

فرض صفر(H_0): بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

فرض مقابل: (H_1) بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

همانطور که جدول ۳ نشان می‌دهد، بیشترین باقیمانده مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۲ را انتخاب کردند و کمترین مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۱ را در تکلیف ۱ انتخاب کردند بنابراین این جدول نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان هفتم، گزینه ۲ را انتخاب کردند.

همچنین با توجه به مقدار0= sig در نتایج جدول ۴، فرض صفر رد می‌شود بدین معنا که بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

فرضیه فرعی۱- ۲: دانش‌آموزان پایه هشتم، عبارت جبری ساده را به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند.

فرض صفر(H_0): بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

فرض مقابل: (H_1) بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

همانطور که جدول ۵ نشان می‌دهد، بیشترین باقیمانده مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۲ را انتخاب کردند و کمترین مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۱ را در تکلیف ۱ انتخاب کردند بنابراین این جدول نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان هشتم، گزینه ۲ را

جدول ۳: فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های مورد انتظار و باقیمانده در پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هفتم به تکلیف ۱

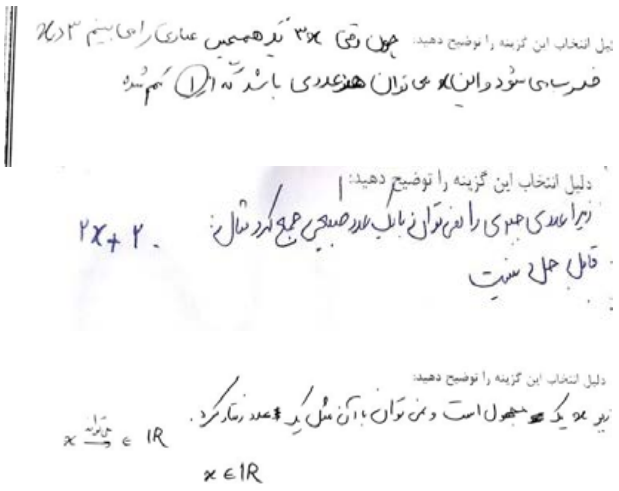
Table 3: Observed and expected frequency and residuals of 7th grade students, task 1

Options	Expected frequency	Observed frequency	Residual
1	28	6	-22
2	28	56	28
3	28	25	-3
4	28	25	-3

جدول ۴: آزمون مربع خی برای پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هفتم به تکلیف ۱

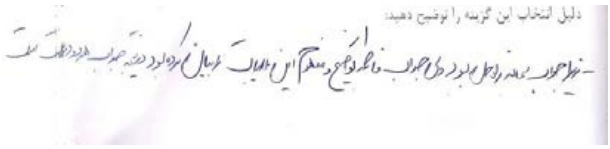
Table 4: Chi-square test for 7th grade students' answers, task 1

	Value
Chi- square	45,000
Df	3
Sig	0,000



شکل ۳: نمونه‌هایی از دلایل دانش‌آموزان برای انتخاب گزینه ۲

Fig. 3: Examples of students' reasons for choosing option 2



شکل ۴: نمونه‌ای از دلایل دانش‌آموزان برای انتخاب گزینه ۴

Fig. 4: Example of students' reason for choosing option 4

انتخاب کردند.

همچنین با توجه به مقدار sig =0 در نتایج جدول ۶، فرض صفر رد می‌شود بدین معنا که بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

فرضیه فرعی۱- ۳: دانش‌آموزان پایه نهم، عبارت جبری ساده را به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند.

فرض صفر(H_0): بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

فرض مقابل(H_1): بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

همانطور که جدول ۷ نشان می دهد، بیشترین باقیمانده مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۲ را انتخاب کردند و کمترین مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۱ را در تکلیف ۱ انتخاب کردند بنابراین این جدول نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان نهم، گزینه ۲ را انتخاب کردند.

همچنین با توجه به مقدار sig=0 در نتایج جدول ۸، فرض صفر رد می‌شود بدین معنا که بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

یافته‌های مربوط به تکلیف ۲

در این تکلیف (پیوست ۱)، عبارت جبری $3+5(x+1)$ ، از نوع پیچیده آمده است و از دانش‌آموزان خواسته شده بود که بیان کنند، کدام توصیف، از نظر آنها درست است.

جدول ۹ و شکل ۵ درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هفتم، هشتم و نهم به فعالیت ۲ آزمون عبارت جبری را نشان می‌دهد.

همانطور که از شکل ۵ مشخص است، در هر پایه تحصیلی، اکثر دانش‌آموزان نسبت به عبارت جبری پیچیده، درک رویه‌ای داشته‌اند اما نکته قابل توجه این است که با افزایش پایه تحصیلی، درصد افرادی که درک رویه‌ای داشتند، کاهش یافته به طوری‌که از پایه هفتم به هشتم از ۳۴٪ به ۲۸٪ (۶٪کاهش داشته) و از پایه هشتم به نهم از ۲۸٪ به ۲۳٪ (۵٪کاهش داشته) کاهش پیدا کرده است.

همچنین درصد فراوانی دانش‌آموزانی که دیدگاه دوگانه رویه‌ای-ساختاری در عبارت جبری پیچیده داشتند، در پایه هفتم ۹٪، در پایه هشتم ۱۹٪ و درپایه نهم نیز ۱۹٪ بوده است که همانطور مشخص است از پایه هفتم به هشتم ۱۰٪ افزایش داشته و در پایه هشتم و نهم مقدارش مساوی است.

در زیر قسمتی از مصاحبه با دانش‌آموزی که گزینه ۳ را انتخاب کرده، امده است:

م- چرا این گزینه را انتخاب کردی؟

د-چون زهرا اشتباه معنی را بیان کرده.

م-چرا؟

د- چون زهرا گفته: " عددی را با ۱ جمع کنیم، حاصل را در عدد ۵ ضرب کنیم" ، این اشتباه است. زیرا ابتدا باید ۵ را در پرانتز ضرب کنیم، بعد حاصل با ۳ جمع شود.

م- یعنی این که اول ۵ را در پرانتز ضرب کنیم با این کاری که زهرا

جدول ۵: فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های مورد انتظار و باقیمانده در پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هشتم به تکلیف ۱

Table 5: Observed and expected frequency and residuals of 8th grade students, task 1

Options	Expected frequency	Observed frequency	Residual
1	34	7	-27
2	34	77	43
3	34	14	-20
4	34	38	4

جدول ۶: آزمون مربع خی برای پاسخ های دانش‌آموزان پایه هشتم به تکلیف ۱

Table 6: Chi-square test for 8th grade students' answers, task 1

	Value
Chi- square	88,059
Df	3
Sig	0,000

جدول ۷: فراوانی های مشاهده شده و فراوانیهای مورد انتظار و باقیمانده در پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه نهم به تکلیف ۱

Table 7: Observed and expected frequency and residuals of 9th grade students, task 1

Options	Expected frequency	Observed frequency	Residual
1	23	3	-20
2	23	60	36
3	23	11	-12
4	23	20	-3

جدول ۸: آزمون مربع خی برای پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه نهم به تکلیف ۱

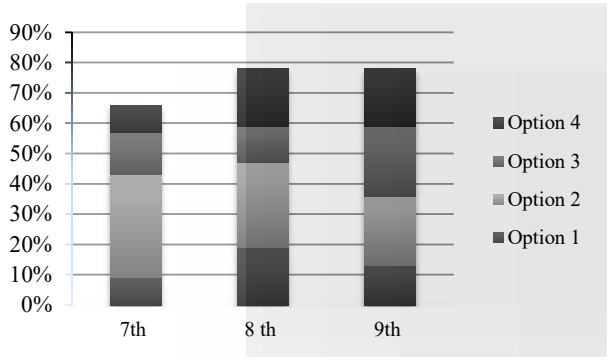
Table 8: Chi-square test for 9th grade students' answers, task 1

	Value
Chi- square	81,000
Df	3
Sig	0,000

جدول ۹: درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان هفتم، هشتم و نهم به فعالیت ۲ آزمون عبارت جبری

Table 9: Percentage of 7th, 8th and 9th students' answers to task 2of algebraic expression test

	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4
7th grade	9%	34%	14%	9%
8th grade	19%	28%	12%	19%
9th grade	13%	23%	23%	19%



شکل ۵: نمودار درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان هفتم، هشتم و نهم به فعالیت ۲ آزمون عبارت جبری

Fig. 5: Frequency percentage of 7th, 8th and 9th students' answers to task 2 of algebraic expression test

انجام داده که اول عدد را با ۱ جمع کنیم بعد حاصل را در ۵ ضرب کنیم، برابر نیست؟

د- خوب معلومه نه...چون اگر۵ را در پرانتز ضرب کنیم، پس از ساده کردن $5x+8$ بدست می‌آید که با عبارت اولی کاملا متفاوت است.

م- چرا مریم درست تعریف را بیان کرده؟

د- چون *عبارت جبری* $5(x+1)+3$را می‌توان با عددهای دیگر جمع و تفریق و ضرب و یا تقسیم کرد.حتی درون خودش هم جمع و ضرب وجود دارد.

همچنین دانش آموز دیگری در جواب این سوال گفت:

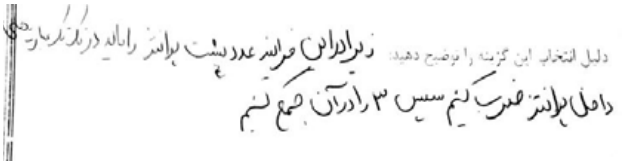
د- زهرا اشتباه بیان کرده، چون ما X را نداریم و مجهول است، پس نمیتوانیم با ۱ جمع کنیم، و همچنین همیشه وقتی پرانتز داریم، اول عدد پشت پرانتز را ضرب می‌کنیم، بعد ساده می‌کنیم، اینکه اول X را با ۱ جمع کنیم، بعد در ۵ ضرب کنیم، اشتباه است

بنابراین همانطور که از مصاحبه بالا هم مشخص است، کاهش درک رویه‌ای دانش‌آموزان با افزایش پایه تحصیلی در عبارت جبری پیچیده، به این علت است که دانش‌آموزان در انجام فرایند مربوط به عبارت جبری، درکی از عمل توزیع‌پذیری را نداشتند. به این معنی که هم ارزی عبارت $a(b+c)$ (ابتدا داخل پرانتز، جمع bبا c ، بعد در a ضرب شود)، با عبارت $ab+ac$ (a در عبارت‌های داخل پرانتز ضرب شود، سپس حاصل را با هم جمع کنیم) را نمی دانستند. در سوال این تکلیف، توصیف عبارت جبری پیچیده $5(x+1)+3$، به صورت $a(b+c)$ بود در حالی که اغلب دانش‌آموزان فرم $ab+ac$ را در نظر داشتند. بنابراین به دلیل نادیده گرفتن عمل توزیع‌پذیری و برابری این دو عبارت، گزینه‌ای را انتخاب کردند که در ان درک رویه‌ای نداشت.

شکل۶ نمونه‌ای از دلایل دانش‌آموزی برای انتخاب گزینه ۳ را نشان می‌دهد.

پاسخ به فرضیه‌های فرعی ۱-۲ و ۲-۲ و ۳-۲

فرضیه فرعی۲-۱: دانش‌آموزان پایه هفتم، عبارت جبری پیچیده را به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند.



شکل ۶: نمونه‌ای از دلایل دانش‌آموزان برای انتخاب گزینه ۳
Fig. 6: Example of students' reason for choosing option 3

جدول ۱۰: فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های موزد انتظار و باقیمانده در پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هفتم به تکلیف ۲
Table 10: Observed and expected frequency and residuals of 7th grade students, task 2

Options	Expected frequency	Observed frequency	Residual
1	23	12	-11
2	23	49	25
3	23	21	-2
4	23	13	-10

جدول ۱۱: آزمون مربع خی برای پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هفتم به تکلیف ۲
Table 11: Chi-square test for 7th grade students' answers, task 2

	Value
Chi- square	37,000
Df	3
Sig	0,000

فرض صفر(H_0): بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

فرض مقابل: (H_1) بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

همانطور که جدول ۱۰ نشان می دهد، بیشترین باقیمانده مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۲ را انتخاب کردند و کمترین مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۱ را در تکلیف ۱ انتخاب کردند بنابراین این جدول نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان هفتم، گزینه ۲ را انتخاب کردند.

همچنین با توجه به مقدار sig=0 در نتایج جدول ۱۱، فرض صفر رد می‌شود بدین معنا که بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

فرضیه فرعی۲- ۲: دانش‌آموزان پایه هشتم، عبارت جبری پیچیده را به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند.

فرض صفر(H_0): بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

فرض مقابل: (H_1) بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

جدول ۱۲: فراوانیهای مشاهده شده و فراوانیهای مورد انتظار و باقیمانده در پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هشتم به تکلیف ۲
Table 12: Observed and expected frequency and residuals of 8th grade students, task2

Options	Expected frequency	Observed frequency	Residual
1	29	27	-2
2	29	43	13
3	29	19	-10
4	29	29	0

جدول ۱۳:آزمون مربع خی برای پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه هشتم به تکلیف ۲
Table 13: Chi-square test for 8th grade students' answers, task 2

	Value
Chi- square	10,000
Df	3
Sig	0,017

جدول ۱۴: فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های موزد انتظار و باقیمانده در پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه نهم به تکلیف ۲
Table 14: Observed and expected frequency and residuals of 9th grade students, task 2

Options	Expected frequency	Observed frequency	Residual
1	20	13	-7
2	20	25	4
3	20	24	3
4	20	21	0

همانطور که جدول ۱۲نشان می‌دهد، بیشترین باقیمانده مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۲ را انتخاب کردند و کمترین مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۳ را در تکلیف ۲ انتخاب کردند بنابراین این جدول نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان هشتم، گزینه ۲ را انتخاب کردند.

همچنین با توجه به مقدار sig=0.017 در نتایج جدول ۱۳، فرض صفر پذیرفته می‌شود بدین معنا که بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

فرضیه فرعی۲- ۳: دانش‌آموزان پایه نهم، عبارت جبری پیچیده را به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند.

فرض صفر(H_0): بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

فرض مقابل: (H_1) بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

جدول ۱۵: آزمون مربع خی برای پاسخ‌های دانش‌آموزان پایه نهم به تکلیف ۲
Table 15: Chi-square test for 9th grade students' answers, task 2

	Value
Chi- square	4,000
Df	3
Sig	0,000

همانطور که جدول ۱۴ نشان می‌دهد، بیشترین باقیمانده مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۲ را انتخاب کردند و کمترین مربوط به دانش‌آموزانی است که گزینه ۱ را در تکلیف ۱ انتخاب کردند بنابراین این جدول نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان نهم، گزینه ۲ را انتخاب کردند.

همچنین با توجه به مقدار sig=0 در نتایج جدول ۱۵، فرض صفر رد می‌شود بدین معنا که بین فراوانی‌های مورد انتظار و مشاهده شده، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

پاسخ به فرضیه اصلی

محقق برای بررسی درک دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم در عبارت‌های جبری ساده و پیچیده، با بهره گیری از آزمون کای-اسکوئر، شش فرضیه فرعی مطرح شده را مورد آزمون قرار داد. تحلیل نتایج، حاکی از رد فرض H_0 بود به جز در فرضیه فرعی پنجم که فرض H_0 تائید شد. اما در هر شش فرضیه تحلیل نتایج جدول فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های مورد انتظار، با توجه به بیشترین باقیمانده، حاکی از آن است که اکثر دانش‌آموزان عبارت‌های جبری ساده و پیچیده را به صورت رویه‌ای درک کرده‌اند.

بحث و نتیجه‌گیری

یکی از مباحث مهم در یادگیری جبر، درک عبارت‌های جبری و دست ورزی با آن‌ها است. دوگانگی فرایند-شیئ در بیشتر مفاهیم ریاضی وجود دارد. عبارت‌های جبری یکی از مفاهیمی است که دارای ماهیت دوگانه فرایند- شیئ است. درک عبارت‌های جبری به عنوان یک شیئ باعث می‌شود به توان به راحتی با آن کار کرد و عملیات جبری دیگر را روی آن اعمال کرد اما دانش‌آموزانی که عبارت‌های جبری را فقط به عنوان فرایند درک می‌کنند، اغلب انجام اعمال روی عبارت‌های جبری مانند ساده کردن، تجزیه کردن و.. را درک نمی‌کنند و طوطی وار به عنوان یک الگوریتم آن را می‌پذیرند.

نتایج این تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان در عبارت‌های جبری (ساده و پیچیده) درک صرفا رویه‌ای دارند به این معنی که عبارت‌های جبری را به صورت مجموعه‌ای از الگوریتم‌ها و فرایندها درک کرده اند. همانطور که از مصاحبه‌ها مشخص شد، این افراد در مواقعی که احتیاج است عملیاتی روی عبارت جبری انجام شود و عبارت جبری را به عنوان یک کل در نظر بگیرند، صرفا مراحل کار را طوطی وار حفظ می‌کنند چرا که هیچ نوع درکی از ساختارکل عبارت جبری ندارند و فقط به مراحل درون یک عبارت جبری تمرکز دارند.

در عبارت‌های جبری پیچیده نسبت به عبارت‌های جبری ساده، درصد فراوانی دانش‌آموزانی که درک صرفا رویه‌ای داشتند، کاهش پیدا کرده بود. نتایج مصاحبه‌ها با تعدادی از دانش‌آموزان نشان داد که این کاهش، به خاطر افزایش درک ساختاری در دانش‌آموزان نبود بلکه به دلایلی چون نادیده گرفتن عمل توزیع پذیری، درک نکردن عبارت‌های جبری، درک نکردن فرایند در عبارت جبری پیچیده بود.

پژوهش حاضر، در راستای پژوهش‌های انجام شده در خارج از کشور در مورد مشکلات دانش‌آموزان در مفاهیم جبری (متغیر و عبارت‌های جبری) در شروع جبر و در هنگام انتقال از حساب به جبر می‌باشد. شباهت پژوهش حاضر با سایر پژوهش‌ها در بیان این مسئله است که دانش‌آموزان درک مفهومی و ساختاری در جمله و عبارت‌ها ندارند. بانرژی برای رفع این مشکل، برای شروع جبر و آموزش مفاهیم جبری، از تشابهات ساختاری بین عبارات جبری و حسابی استفاده کرد و با استفاده از این تشابهات، رویکرد تدریسی را برای شروع جبر با دید ساختاری در حساب ارائه داد. همچنین محققان در سایر تحقیقات، مشکلات درک ساختاری دانش‌آموزان را در نوشتن عبارت‌های جبری و دستکاری آنها بررسی کردند که نتایج حاکی از آن بود که درک مفهومی و ساختاری از عبارت‌های جبری نداشتند که بعضی از آنها نبود درک ساختاری در عبارت‌های جبری را به دلیل ناکافی بودن درک ساختاری در عبارت‌های حسابی می‌دانستند. اما پژوهش حاضر روی تصریح درک رویه‌ای- ساختاری دانش‌آموزان در عبارت‌های جبری (پیچیده و ساده) تمرکز دارد که نتایج نشان می‌دهد دانش‌آموزان درک ساختاری ضعیف در عبارت‌های جبری دارند و دوگانگی فرایند- شیئ به طور کامل برای اکثر دانش‌آموزان درک نشده است.

بنابراین به منظور ارتقا درک ساختاری، پیشنهاد می‌شود که برنامه ریزان درسی ریاضی در تهیه محتوای کتاب درسی، توجه بیشتری داشته باشند و زمینه را برای ارتقا درک ساختاری فراهم نمایند.

مشارکت نویسندگان

تمام نویسندگان به نسبت سهم برابر در این پژوهش مشارکت داشتند.

تشکر و قدردانی

از تمام کسانی که ما را در انجام این پژوهش یاری رساندند تشکر و قدردانی داریم.

تعارض و منافع

«هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.»

پیوست ها

پیوست ۱

زنگ ریاضی بود. وقتی خانم معلم درس آن روز را به پایان برد، رو به بچه ها کرد و گفت: دو سوال پای تابلو می نویسم که حل کردنی نیستند. فقط می خواهم نظر شما را در مورد آنها بدانم و برای سوال اول نوشت:

" معنی عبارت جبری $3x - 1$ چیست؟"

سمانه دست بلند کرد و گفت:

" این عبارت فرایندی است که طی ان باید ۳ را در یک عدد ضرب کنیم، حاصل را از عدد ۱ کم کنیم"

فاطمه در مورد معنی این عبارت گفت:

" همانطور که یک عدد را می توان با عبارات جبری دیگر جمع یا ضرب یا تقسیم و یا تفریق کرد، با این عبارت نیز می توان مانند یک عدد رفتار کرد "

به نظر شما کدام گزینه درست است:

۱- توضیح سمانه و فاطمه هر دو اشتباه است.
۲- توضیح سمانه درست است و فاطمه اشتباه بیان کرده است.
۳- توضیح سمانه اشتباه است، فاطمه درست بیان کرده است.
۴- هر دو نفر، معانی را درست بیان کردند.

دلیل انتخاب این گزینه را توضیح دهید:

پیوست ۲

برای سوال دوم به صورت زیر نوشت:

" ۲) معنی عبارت جبری $3 + 5(x + 1)$ چیست؟"

مریم در مورد معنی این عبارت گفت:

" همانطور که یک عدد را می توان با عبارات جبری دیگر جمع یا ضرب یا تقسیم و یا تفریق کرد، با این عبارت نیز می توان مانند یک عدد رفتار کرد "

زهرا در مورد معنی این عبارت بیان کرد:

" این عبارت فرایندی است که طی ان باید عددی را با ۱ جمع کنیم، حاصل را در ۵ ضرب کنیم، سپس، حاصل را با عدد ۳ جمع کنیم "

به نظر شما کدام گزینه درست است:

۱- توضیح مریم و زهرا هر دو اشتباه است.
۲- توضیح زهرا درست است، مریم اشتباه بیان کرده است.
۳- توضیح زهرا اشتباه است، مریم درست بیان کرده است.
۴- هر دو نفر، معانی را درست بیان کردند.

دلیل انتخاب این گزینه را توضیح دهید:

منابع و مآخذ

[1] Ladson-Billings G. Just what is critical race theory and what's it doing in a nice field like education? *International Journal of Qualitative Studies in Education*. 1998; 11(1): 7-24.

[2] Asghari N. Developing a model to enhance elementary teachers' ability to foster functional thinking and algebraic reasoning in elementary students. *CSTP*. 2014; 2(3): 141-162. Persian.

[3] Kieran C. The learning and teaching of school algebra, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 271-290). Reston, V A: NCTM; 1992.

[4] Bell A. Problem solving approached to algebra: Two aspects. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 167-186). Dordrecht: Kluwer; 1996.

[5] Kaput JJ. A research base supporting long term algebra reform. In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 7194). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education; 1995.

[6] Kaput JK. *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science; 2000.

[7] Sfard A, Linchevski L. The gains and the pitfalls of reification? The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 1994; 26(26): 191–228.

[8] Küchemann D. Algebra in K. Hart (Ed.), *Children uderstanding of mathematics: 11–16* (pp. 102–119). London: Murray; 1981.

[9] MacGregor M, Stacey K. Students understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*. 1997; 33: 1–19.

[10] Philipp RA. The many uses of algebraic variables, *Mathematics Teacher*. 1992; 85: 7, 557–561.

[11] Stephens AC. Developing students' understandings of variable, *Mathematics Teaching in the Middle School*. 2005; 11(2): 96-100.

[12] Wagner, S. What are these things called variables? *Mathematics Teacher*. 1983; 76: 474478.

[13] Swan M. Making sense of algebra. *Mathematics Teaching*. 2000; *171*: 16-19.

[14] Van Ameron B. Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 2003; 54: 63 - 75.

[15] Liebenberg R, Linchevski L, Oliver A, Sasman M. Laying the foundation for algebra: developing an understanding of structure. *Proceedings of the Fourth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* (pp. 276-282). Pietersburg, South Africa; 1998.

[16] Banerjee R, Subramaniam K. Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 2011; 80: 351–367.

[17] Booth LR, Watson J. Learning and teaching algebra. *The*

students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology*. 2006; 27: 147-164.

[25] *National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM; 2000.

[26] Sfard A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 1991; 22: 1-36.

[27] Kieran C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age; 2007.

[28] Kieran C. The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales; 1996.

[29] Radford L. The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 13-36). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic; 2001.

[30] Kieran C. The core of Algebra: Reflections on its main activities. In: Stacey K., Chick H., Kendal M. (Eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (*The 12thICMI Study. New ICMI Study Series*, vol 8.) Springer, Dordrecht; 2004.

Australian Mathematics Teacher. 1990; 46(3): 12-14.

[18] Carraher DW, Schliemann AD, Schwartz JL. Early algebra is not the same as algebra early. In In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). New York: Lawrence Erlbaum; 2008.

[19] Novotná J, Hoch M. How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*. 2008; 20(2): 93-104.

[20] Warren E. The role of arithmetic structure in the transition from arithme=tic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*. 2003; 15: 122-137.

[21] Kieran C. The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company; 1992.

[22] Welder RM. Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School Science and Mathematics*. 2012; 112(4): 255 – 264.

[23] Sfard A. Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*. 1994; 14(1): 44-55.

[24] Capraro MM, Joffrion H. Algebraic equations: Can middleschool

Citation: (Vancoure): Heidari F. Z, Asghary N. [Investigating junior high school students' procedural and structural concep-tion of algebraic expressions]. *Tech. Edu. J.* 2019; 13(3): 660-671.

http://dx.doi.org/10.22061/jte.2018.3384.1879

COPYRIGHTS

©2019 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.