دریافت مقاله: ۹۴/۰۲/۰۴
پذیرش نهایی: ۹۴/۱۰/۰۶
http: //jte.srttu.edu
ISSN: 2345 – 5462

نشریه علمی ـ پژوهشی
فنــاوری آمــوزش
جـــلـد ۱۰، شــــمـاره ۲، بهار ۱۳۹۵، صص ۱۲۱ تا ۱۳۲

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

بررسی درک دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی بر اساس مدل مژیا راموس و همکاران

ابراهیم ریحانی[۱]، فاروق فتح‌الهی[۲] و فهیمه کلاهدوز[۳]

[۱] دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، (نویسنده مسئول): e_reyhani@yahoo.com
[۲] کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان اشنویه
[۳] دانشجوی دکترای آموزش ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: استدلال و اثبات در آموزش ریاضیات در همهٔ مقاطع تحصیلی از مدرسه تا دانشگاه از اهمیت خاصی برخوردار است و درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات تقریباً غیر ممکن است. در این مطالعه که به روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی انجام گرفته است، هدف مقاله، بررسی درک و فهم دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی می‌باشد. نمونهٔ مورد مطالعه، ۱۷۰ نفر از دانشجویان مقطع کارشناسی ریاضی از چهار دانشگاه شهید رجایی، شهید بهشتی، امیر کبیر و علم و صنعت است که نمونهٔ در دسترس محسوب می‌شود. ابزار اندازه‌گیری در پژوهش حاضر، پرسش‌نامه‌ای است که طراحی آن بر اساس تعمیمی از پرسش‌نامه روی[۱] و همکاران[۲] انجام گرفته است. در این پرسش‌نامه قضیه‌ای همراه با اثباتش ارائه گردید و سپس از دانشجویان خواسته شد تا به سؤالاتی در مورد فرایند ساخت اثبات ریاضی، پاسخ دهند. مدلی که به منظور ارزیابی پاسخ دانشجویان به سؤالات پرسش‌نامه استفاده شده است بر اساس مدل مژیا راموس[۳] و همکاران[۴] می‌باشد که از دو جنبهٔ موضعی و کلی اثبات تشکیل شده است. این مدل، هفت سطح مختلف از و فهم دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی را بررسی می‌نماید. نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان داد که اکثر دانشجویان مورد مطالعه به جنبه‌های موضعی اثبات دست یافته‌اند. در واقع آن‌ها توانسته‌اند رابطه‌ی بین مفاهیم و گزاره‌های موجود در یک اثبات را درک کنند و ارتباط بین چند گزارهٔ خاص را نشان دهند، ولی درصد کمی از آن‌ها ساختار کلی اثبات را درک نموده‌اند که به نظر می‌رسد عوامل متعددی از جمله عدم توجه دانشجویان به فرض قضیه، ناتوانی آن‌ها در ارائه استدلال منطقی و سازماندهی منطقی گزاره‌های اثبات و از همه مهم‌تر، دانش ناکافی دانشجویان در برخی موارد می‌تواند از دلایل این ضعف باشد.

کلمات کلیدی: استدلال، اثبات ریاضی، دانشجویان، درک اثبات.

Study on Students' Understanding of the Process Mathematical Proof Based on Mejia Ramos et al

Ebrahim Reyhani[1], Faroogh Fathollahi[2] and Fahimeh Kolahdouz[3]

[1]Associate Professor of Mathematics University Shahid Rajaee, e-mail: e_reyhani@yahoo.com
[2]M. A. in mathematics education and mathematics teacher Ošnaviya city
[3]Doctoral student in mathematics education University of Ferdowsi Mashhad

Abstract: Reasoning and proof in mathematics education are important at all educational levels, from school to university. Understanding mathematics without emphasis on reasoning and proving is almost impossible. The purpose of this study was to investigate the university students' conception of mathematical proof. For this, a survey method was used. The participants of this study were 170 students collected from four universities; Shahid Rajaee Teacher Training, Shahid Beheshti, Science and Technology and Amirkabir University of Technology as available samples. The data collecting Instrument was a questionnaire based on the modified version of Roy and et.al (2010). In this questionnaire a theorem with its proving was presented and then the students were asked to answer the questions about the process of making the mathematical proof. A model was used to evaluate the students' answers to questions based on Ramos and et.al (2011). It is consists of both global and local aspects. This model investigates seven different levels of understanding of the process of making mathematical proof. The findings of the study showed that most of the students had a local comprehension of the proof. In fact, they understood the relations between the concepts and statements in the proof. But a small percentage of them had a more holistic comprehension of the proof. It seems several factors, including the lack of attention to the assumptions of the theorem, their inability to provide logical reasoning and rational organization of statements of the proof, and most importantly, the lack of students' knowledge may be insufficient in this inability.

Key words: Reasoning, Mathematical Proof, Students, Comprehension of Proof.

۱- مقدمه

یکی از جنجالی‌ترین بحث‌های جامعهٔ ریاضی طی قرن‌های متمادی، پیرامون فرایند استدلال و اثبات بوده و هست و تاریخ ریاضی گواه صادقی بر این ادعاست. تاریخ نشان می‌دهد که از قبل از یونانی‌ها تا زمان حال، تبیین ریاضیدانان از ریاضی و چیستی آن، نگاه آن‌ها را به استدلال و اثبات شکل داده است. همان‌طور که مشخص است، در آموزش هم این فرایندها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند زیرا دانش‌آموز یا دانشجویی که استدلال ریاضی، تأثیر مطلوبی بر او نگذاشته باشد، از مهمترین جنبهٔ تفکر روشن و تفکر انتقادی محروم مانده است[۱]. در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای نیز چنین آمده است که استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های مختلف توسعه می‌دهد[۲]؛ همچنین این شورا بر این باورست افرادی که استدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند. این شورا اظهار می‌دارد استدلال و اثبات نباید به عنوان فعالیت‌های ویژه و مخصوصی که به صورت یک موضوع جداگانه و خاص در برنامهٔ درسی باشند، در نظر گرفته شوند؛ بلکه این مفاهیم باید به طور طبیعی و مداوم در همهٔ بحث‌های کلاسی حضور داشته باشند[۲]. بال و باس[۵] نیز معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه‌ای ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند و این دانشِ کسب شده که فاقد توجیه کردن است به‌راحتی می‌تواند غیر منطقی و غیر مستدل باشد[۳]. همچنین راس[۶] یکی از مهمترین اهداف تدریس ریاضیات را آموزش استدلال منطقی به دانش‌آموزان می‌داند وی معتقد است که اساس ریاضیات، استدلال است؛ در حالی که علم توسط مشاهده تأیید می‌شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تأیید قرار می‌گیرد[۴]. بنابراین جوهرهٔ ریاضیات در اثبات نهفته است و باید به تفاوت بین مثال و حدسیه و اثبات توجه کرد. پولیا[۷] معتقد است، در صورتی که قواعد ریاضی را بدون دلیل به دانش آموزان و دانشجویان آموزش دهیم، انگیزه‌ای برای فهمیده شدن پیدا نمی‌کنند و این قواعدِ ناپیوسته هرچه زوتر فراموش می‌شوند. همچنین برخی از محققان ([۵]، [۶]، [۷]) در مطالعات خود مشاهده کرده‌اند، اغلب دانشجویانی که با اثبات مواجه می‌شوند؛ در به کاربردن نمادها و فهم زبان ریاضی، در استفاده از تعاریف برای استنتاج یک اثبات و در بسط و توضیح معنای یک گزاره یا قضیهٔ ریاضی با مشکل مواجه می‌شوند.

علاوه بر این، مور[۸] در نتایج تحقیقات خود بیان می‌کند که اکثر دانشجویان نمی‌دانستند چگونه یک اثبات را شروع کنند و چگونه فرضیات را به نتایج متصل نمایند و بین آن‌ها ارتباط برقرار کنند. وی دریافت که اکثر دانشجویان روی رویه‌ها بیشتر از محتوا تکیه می‌کنند. بسیاری از دانشجویان شرکت‌کننده در مطالعه مور، می‌گویند که آن‌ها در دروس دانشگاهی اثبات‌ها را حفظ کرده بودند، زیرا آن‌ها نفهمیده بودند که یک اثبات چیست و چگونه باید آن را نوشت. او در مطالعاتش نتیجه می‌گیرد که دانشجویان، درک شهودی ضعیف و تصورات مفهومی[۹] ناکافی از تعاریف و مفاهیم ریاضی دارند[۵].

مژیا راموس و انگلس اظهار می‌دارند مطالعات تجربی کمی در مورد درک دانشجویان از گزاره‌های اثبات وجود دارد. در حقیقت محققان بیشتر گرایش به بررسی توانایی دانشجویان در ساخت اثبات دارند تا درک آن‌ها از اثبات. آن‌ها با مطالعهٔ ۱۴۴ مقاله در زمینهٔ استدلال و اثبات ریاضی، دریافتند که تنها در ۳ مقاله به بررسی درک دانشجویان از اثبات‌های ریاضی پرداخته شده است. لذا تأکید می‌کنند که تحقیقات بیشتری در زمینهٔ درک دانشجویان از خواندن گزاره‌های متن اثبات مورد نیاز است[۸].

آناپا[۱۰] و سامکار[۱۱] نیز تأکید می‌کنند که باید به دانشجویان آموزش داد که چرا اثبات در ریاضیات مهم است، چه چیزی یک اثبات است و چگونه یک اثبات ساخته می‌شود. آن‌ها در نتایج تحقیقات خود دریافتند مشکلات دانشجویان در اثبات کردن، تا حدودی مربوط به چگونگی درک آن‌ها از اثبات است. بنابراین اولین گام در کمک به دانشجویان در چنین مشکلاتی، بررسی درک و فهم آن‌ها از اثبات است[۹]. در این پژوهش نیز هدف، بررسی درک و فهم دانشجویان مقطع کارشناسی ریاضی از فرایند اثبات ریاضی و مشخص نمودن سطح اثبات

آن‌ها بر اساس مدل مژیا راموس و همکاران می‌باشد[۱۰]. امید است نتایج این تحقیق مورد استفاده دانشجویان، دبیران و استادان ریاضی واقع گردد.

۲- مبانی نظری و پیشینهٔ پژوهش

۲-۱- اثبات ریاضی و اهداف آن

به طور کلی، نگاه بسیاری از ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی به معنا و مفهوم اثبات، این است که یک اثبات ریاضی دنباله‌ای منطقی و صوری از استدلال‌هایی است که با یک مجموعه از داده‌های معین و مشخص، مانند اصل موضوعه، تعاریف، مفروضات و نتایج ثابت شدهٔ قبلی شروع می‌شود؛ و با استفاده از مراحل منطقی به یک نتیجهٔ معتبر می‌رسد([۱۱]، [۱۲]). همان‌طور که مشاهده می‌شود اثبات‌ها به عنوان "استدلال منطقی" شناخته شده‌اند و این نشان می‌دهد که منطق، نقش قابل توجهی در اثبات دارد[۱۳].

در طول تاریخ، فرایند اثبات به وسیلهٔ ریاضیدانان یونانی به عنوان ابزاری برای خدمت به اعتباربخشی و تأیید گزاره‌های ریاضی مطرح گردیده است[۱۴]. امروزه نیز برخی از محققان و آموزشگران ریاضی اهداف و کارکردهایی را برای اثبات در ریاضیات برشمرده‌اند([۶]، [۱۲]، [۱۵]، [۱۶]،[۱۷]، [۱۸]) که در این‌جا به اختصار به معرفی آن‌ها می‌پردازیم؛

۱. تأیید درستی یک گزاره
۲. توضیح چرایی یک گزاره (توجیه کردن)[۱۲]
۳. سازماندهی کردن مفاهیم ریاضی[۱۳]
۴. کشف یا ابداع نتایج جدید[۱۴]
۵. گفتمان[15] ریاضی
۶. کمک به افزایش قدرت حل مسأله[۱۶]
۷. ایجاد چالش ذهنی[۱۷]
۸. انتقال[۱۸]
۹. افزایش مهارت تفکر انتقادی[۱۹]
۱۰. ایجاد استقلال فکری[۲۰]

همی به نکتهٔ مهم و جالب توجهی اشاره می‌کند. او معتقد است که هر کدام از این اهداف در شرایط مناسب و با رویکرد آموزشی مخصوص به خود می‌توانند ظاهر شوند. به عنوان مثال، در موقعیت‌های معینی (مثلاً در مقطع ابتدایی) نقش "توضیح" از طریق رویکرد استقرایی به دست می‌آید. در حالی‌که در موقعیت‌های دیگر (مثلاً در جامعهٔ ریاضیدانان) یک رویکرد استنتاجی این نقش را بهتر ایفا می‌کند[۱۶].

برخی از محققان در مطالعات خود مشاهده می‌کنند که بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان از اهداف و کارکردهای اثبات در ریاضیات مطلع نیستند و بر این باورند که اثبات ریاضی تنها برای تأیید حقایقی که تاکنون آن‌ها را می‌دانستند، استفاده می‌شود. در واقع آن‌ها درک محدودی از اهداف و کارکردهای اثبات در ریاضیات دارند([۳]، [۱۴]، [۱۸]).

۲-۲- مشکلات دانشجویان در زمینهٔ اثبات ریاضی

علی‌رغم تأکید زیاد بر اهمیت استدلال و اثبات در آموزش ریاضی و ارائهٔ تعاریف و کارکردهای متعدد برای این مفاهیم، تحقیقات نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌آموزان، دانشجویان و حتی برخی از معلمان ریاضی به درجهٔ قابل قبولی از درک و فهم اثبات نرسیده‌اند و اغلب آن‌ها در یادگیری و نوشتن اثبات ریاضی مشکل دارند. به عنوان مثال، برخی از تحقیقات([۱۳]،[۱۹]) بیانگر آن است که بعضی از دانشجویان در استنباط احکام ریاضی برای بررسی این که یک سطر از یک اثبات صحیح است یا نه و این‌که در چه صورتی یک اثبات، معتبر است، مشکل اساسی دارند.

مور نیز در مطالعه خود هفت منبع مهم از مشکلات دانشجویان را در تجربه‌های خود از ساختار اثبات، به شرح زیر بیان می‌کند[۵].

۱. دانشجویان تعاریف را نمی‌شناسند و قادر به بیان آن‌ها نیستند؛
۲. دانشجویان درک شهودی کمی از مفاهیم دارند؛
۳. تصورات مفهومی دانشجویان برای انجام اثبات کافی نیست؛
۴. دانشجویان نمی‌توانند یا تمایلی به ایجاد و استفاده از مثال‌های خود ندارند؛
۵. آن‌ها نمی‌دانند چگونه با استفاده از تعاریف، ساختار کلی اثبات را به دست آورند؛

۶. دانشجویان در فهم و استفاده از نماد و زبان ریاضی ناتوان هستند؛
۷. دانشجویان در شروع اثبات مشکل دارند و نمی‌دانند یک اثبات ریاضی را از کجا شروع کنند[۵].

دی‌وانس‌پرونسن[۲۱] و همکارانش نیز بر اساس نتایج تحقیقات انجام شده، دلایل مشکلات دانشجویان در رویارویی با اثبات، را به صورت زیر طبق بندی می‌کنند؛

۱. فقدان دانش محتوایی؛
۲. عدم توانایی در به کارگیری دانش محتوایی؛
۳. تمرکز روی رویه‌ها به جای مفهوم؛
۴. فقدان دانش استراتژیکی؛
۵. عدم درکِ درستی و صحت اعتبار یک نتیجهٔ اثبات شده[۱۹].

مک‌نامارا[۲۲] نشان داد که یک عامل اصلی در درک اثبات، ساختار متن اثبات است. در حقیقت یک متن منسجم، شکاف مفهومی کمتری دارد؛ به همین دلیل به استنباط کمتری برای پر کردن شکاف‌ها نیاز است. برعکس، یک متن با انسجام کمتر دارای شکاف‌های بیشتری است، لذا نیازمند استنباط بیشتری می‌باشد. همچنین وی اشاره می‌کند دانشجویانی که ضمن مطالعه، توضیحات را برای خود زمزمه می‌کنند، نسبت به بقیه، اطلاعات بیشتری کسب می‌نمایند[۲۰].

هارو[۲۳] نیز در مطالعهٔ خود مشکلات دانشجویان سال اول رشتهٔ ریاضی در حل مسائل مرتبط با اثبات را به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کند:

۱ - مشکل در درک مفاهیم ریاضی ۲- بدفهمی آن‌ها از فرایند اثبات ۳- نقص در یادگیری منطق ۴- عدم توانایی در استفادهٔ مناسب از نمادها و زبان ریاضی[۲۱].

کن‌ردی و فریس[۲۴] معتقدند که حتی اگر دانش‌آموزان و دانشجویان در ساخت اثبات، در امتحانات موفق باشند، لزوماً منعکس‌کنندهٔ درک آن‌ها از اثبات نیست، زیرا ممکن است اثبات‌ها را بدون این‌که درک کنند حفظ نمایند. آن‌ها برای رفع این مشکل آزمونی به نام "آزمون درک اثبات[۲۵]" را پیشنهاد می‌کنند، که در آن به دانش‌آموزان یا دانشجویان یک اثبات ارائه می‌گردد و سپس از آن‌ها درخواست می‌شود تا به سؤالاتی در مورد فرایند ساخت و ویژگی‌های خاص یک اثبات جواب دهند.

این روش، فرصتی فراهم می‌آورد تا بررسی عمیقی روی درک دانش‌آموزان و دانشجویان از اثبات ریاضی صورت بگیرد[۱۳]. مژیا راموس و همکارانش نیز مدلی برای ارزیابی توانایی دانشجویان در فرایند اثبات ارائه می‌دهند[۱۰]. در ادامه به معرفی این مدل که چارچوب نظری مطالعهٔ حاضر را تشکیل می‌دهد، خواهیم پرداخت.

۲-۳- مدل ارزیابی برای بررسی درک دانشجویان از اثبات ریاضی

مدلی که در مطالعهٔ حاضر برای ارزیابی درک دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی استفاده شده، بر اساس مدل مژیا راموس و همکاران است. این مدل می‌تواند تا حدودی استادان ریاضی را از آنچه دانشجویان در مورد اثبات می‌فهمند و آنچه نمی‌فهمند، آگاه سازد. مدل مژیا راموس و همکاران هفت سطح مختلف از درک و فهم دانشجویان را در مورد فرایند اثبات ریاضی بررسی می‌کند. آن‌ها این مدل را در دو دسته طبقه‌بندی می‌نمایند. دسته اول در ارتباط با جنبهٔ موضعی اثبات[۲۶] و دسته دوم در ارتباط با جنبهٔ کلی اثبات[۲۷] است. جنبه‌های موضعی و کلی اثبات توسط مژیا راموس و همکاران بدین‌گونه طبقه‌بندی شده‌اند[۱۰]؛

الف) جنبهٔ موضعی اثبات

در این جنبه هدف، ارزیابی درک دانشجویان از گزاره‌های خاص اثبات است و این‌که چگونه این گزاره‌ها با گزاره‌های دیگر مرتبط می‌شوند. جنبهٔ موضعی خود شامل سه سطح زیر می‌باشد؛

۱) معنی کردن اصطلاحات و گزاره‌های متن اثبات[۲۸]: یکی از اساسی‌ترین راه فهمیدن هر نوع متن یا نوشته‌ای، فهمیدن معنی هر واژهٔ آن جمله است. کن‌ردی و فریس نشان می‌دهند که دانشجویان زمانی که در حال خواندن یک اثبات ریاضی هستند، در فهم و معنای اصطلاحات ریاضی با مشکل مواجه می‌شوند. سلدن و سلدن[۲۹] معتقدند که دانشجویان باید قبل از تلاش برای درک کلیات یک اثبات، گزاره‌های مربوط به آن قضیه را درک کنند [۱۳].

در مورد اثبات، فرد می‌تواند درک خواننده را با پرسش از او در شناسایی تعریف یک اصطلاح مهم، یا مشخص

کردن مفهوم آن در بعضی گزاره‌های دیگر، ارزیابی کند. به‌طور کلی ارزیابی این سطح از اثبات می‌تواند با درخواست موارد زیر از دانشجویان در فرایند اثبات انجام پذیرد؛

۱- توضیح یک اصطلاح داده شده در اثبات؛

۲- ارائه مثال‌هایی که یک اصطلاح معین در اثبات را نشان دهد؛

۳- توضیح یک گزاره از اثبات با شیوه‌ای متفاوت.

۲) وضعیت منطقی گزاره‌ها و چارچوب اثبات[۳۰]: یانگ و لین[۳۱] معتقدند در اکثر اثبات‌های هندسی دبیرستان، یک قضیهٔ اثبات شده به‌طور مستقیم بعد از ادعای این که یک فرض درست است، استنتاج می‌شود، ولی در مفاهیم ریاضیات پیشرفته، دانشجو نه تنها به شناسایی وضعیت منطقی گزاره‌ها در اثبات نیاز دارد، بلکه باید روابط منطقی بین گزاره‌های اثبات‌شده و فرضیات و نتایج اثبات را نیز تشخیص دهد[۲۲]. ارزیابی درک دانشجویان از وضعیت منطقی گزاره‌ها می‌تواند با درخواست موارد زیر از آن‌ها انجام‌پذیرد؛

۱- شناسایی فرض و حکم در یک اثبات؛

۲- شناسایی هدف یک گزاره در اثبات؛

۳- پیدا کردن ارتباط منطقی چند گزاره خاص برای منجر شدن به یک نتیجه معتبر.

۳) توجیه ادعا[۳۲]: در اثبات، گزاره‌های جدید، نتایجی از مفاهیم قبلی، قضایا و قواعد منطقی، اصول موضوعه و دست‌ورزی‌های منطقی هستند که با قواعد منطقی و صحیح پذیرفته می‌شوند. بنابراین یک بُعد از درک اثبات، شامل توانایی فراهم ساختن توجیه منطقی برای یک ادعای جدید بر اساس نتایج قبلی است. ارزیابی این سطح از اثبات می‌تواند با درخواست موارد زیر از دانشجویان انجام پذیرد؛

۱- بیان دلایل وجود برخی از گزارهایی که توجیه آن در متن اثبات موجود است.

۲- بیان دلایل حذف برخی از گزاره‌ها در متن اثبات.

ب) جنبهٔ کلی اثبات

این جنبه از اثبات، درک کلی یادگیرنده از اثبات را نشان می‌دهد. در این جنبه، اثبات به‌عنوان یک کل برحسب ایده‌ها و روش‌های اصلی و کاربرد آن‌ها در دیگر مفاهیم، درک می‌شود. مژیا راموس و همکاران جنبهٔ کلی اثبات را در چهار سطح زیر طبقه‌بندی می‌کنند؛

۴) خلاصه کردن مفاهیم اصلی اثبات[۳۳]: این کار زمانی میسر می‌شود که خواننده مفاهیم اصلی اثبات را به‌خوبی درک نماید و به ارتباط منطقی گزاره‌ها پی‌ببرد. ارزیابی این سطح از اثبات می‌تواند با درخواست موارد زیر از دانشجویان انجام‌پذیرد؛

۱- از بین چند گزاره بهترین خلاصه را برای اثبات ارائه شده انتخاب کنند؛

۲- خلاصه‌ای از اثبات را ارائه دهند؛

قابل توجه است که یک خلاصهٔ خوب، شامل ایده‌های اصلی اثبات است، نه فقط شرح و تفصیل برخی از ایده‌ها و جزئیات.

۵) معین کردن ساختارهای جزئی[۳۴]: این سطح از اثبات مستلزم شکستن اثبات به عناصر سازنده و ساختارهای جزئی آن و سپس تعیین رابطه منطقی بین هر یک از این ساختارهاست. ارزیابی این سطح از اثبات می‌تواند با درخواست موارد زیر از دانشجویان صورت پذیرد:

۱- تعیین اهداف یک بخش از اثبات و ارتباط آن با سایر گزاره‌های دیگر اثبات.

۲- درجه‌بندی گزاره‌های یک اثبات و تعیین روابط منطقی بین آن‌ها[۱۰].

۶) به کارگیری روش‌های اثبات در زمینه‌های دیگر[۳۵]: یک جنبهٔ مهم از اثبات شامل شناسایی شیوه‌های آشنا در اثبات است و تعیین راه‌هایی که بتوان این شیوه‌ها را برای حل تکالیف دیگر به کار برد. ارزیابی این سطح از اثبات به روش‌های زیر می‌تواند انجام پذیرد.

۱- انتقال روش: از خواننده خواسته شود قضیه‌ای مشابه با قضیهٔ اصلی را با همان روش اثبات کند.

۲- شناسایی روش‌ها: برای این منظور از خواننده، خواسته شود روش به‌کاربرده شده در قضیهٔ اصلی را در قضیه‌های دیگر کشف نماید.

۳- درک کردن محدودهٔ روش: این امر مستلزم شناسایی موقعیت‌هایی است که نمی‌توان یک روش اثبات را در آن موقعیت‌ها به کار برد.

۷) توضیح اثبات با شکل و مثال[۳۶]: درک یک اثبات اغلب شامل درک چگونگی شرح اثبات و توانایی نشان دادن آن

به وسیلهٔ یک مثال خاص است که ترتیب مراحل اثبات را نشان می‌دهد[۱۰]. در این سطح می‌توان برای ارزیابی درک دانشجویان از اثبات، موارد زیر را از آن‌ها درخواست نمود:

۱- نشان دادن مراحل اثبات در قالب یک مثال خاص که مستلزم توانا بودن شخص در شناسایی راهی است که در آن یک دنباله از نتایجِ اثبات، در یک مثال به کار برده شود.

۲- شرح یک گزاره از اثبات یا خود اثبات در قالب نمودار، یا شکل[۱۰].

۳- روش تحقیق

۳-۱- نمونه، روش نمونه‌گیری و حجم نمونه

این پژوهش به روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی انجام گرفته است. جامعهٔ آماری این تحقیق، کلیه دانشجویان مقطع کارشناسی دانشگاه‌های تهران هستند که در سال تحصیلی ۱۳۹۲-۱۳۹۱ در رشتهٔ ریاضی مشغول به تحصیل بودند.

نمونه‌گیری از نوع نمونه‌گیری در دسترس است و شامل انتخاب ۱۷۰ نفر دانشجو مقطع کارشناسی از چهار دانشگاه شهید رجایی، شهید بهشتی، امیر کبیر و علم و صنعت می‌باشد که حداقل دو درس ریاضیات عمومی ۱ و ۲ را گذرانده‌اند. تعداد دانشجویان در نمونهٔ آماری در جدول ۱ به تفکیک جنسیت ارائه شده است.

جدول ۱- فراوانی نمونهٔ آماری تحقیق

دانشگاه	جنسیت	دختر	پسر	جمع
شهید رجایی	فراوانی	۲۰	۴۲	۶۲
	درصد	٪۳۲	٪۶۸	٪۱۰۰
شهید بهشتی	فراوانی	۲۵	۸	۳۸
	درصد	٪۷۶	٪۲۴	٪۱۰۰
امیر کبیر	فراوانی	۲۲	۱۶	۳۸
	درصد	٪۵۸	٪۴۲	٪۱۰۰
علم و صنعت	فراوانی	۲۷	۱۰	۳۷
	درصد	٪۷۳	٪۲۷	٪۱۰۰
جمع فراوانی		۹۴	۷۶	۱۷۰

۳-۲-ابزار گردآوری داده‌ها

در این پژوهش برای گردآوری داده‌ها از ابزار پرسش‌نامه استفاده شده که طراحی آن بر اساس تعمیمی از پرسش‌نامهٔ روی، الکاک و انگِلس است و تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانشجویان به سؤالات به کمک مدل مژیا راموس و همکارانش انجام گرفته است. دلیل انتخاب این پرسش‌نامه به‌عنوان ابزار اصلی پژوهش، تطابق آن با هدف مطالعهٔ حاضر می‌باشد. روایی صوری و محتوایی پرسش‌نامه توسط تعدادی از استادان ریاضی و آموزش ریاضی تأیید گردید و با استفاده از نرم‌افزار spss، ضریب آلفای کرونباخ پرسش‌نامه ۰/۸ به دست آمد که پایایی مناسب پرسش‌نامه را نشان می‌دهد.

پرسش‌نامه مورد استفاده در این مطالعه (شکل۱)، درک دانشجویان را از فرایند اثبات ریاضی ارزیابی می‌کند و شامل ۹ سؤال باز پاسخ می‌باشد. در پرسش‌نامه ابتدا قضیهٔ تعمیم یافتهٔ مقدار میانگین همراه با مراحل اثباتش ارائه گردید و سپس از دانشجویان خواسته شد تا به سؤالاتی که در مورد فرایند ساخت اثبات است پاسخ دهند. قابل توجه است که سؤال ۹ در ارتباط با قضیهٔ مورد نظر نیست و صرفاً برای تکمیل مدل ارزیابی مژیا راموس و همکارانش طراحی شده است.

قضیه: اگر توابع f و g بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشند و اگر به ازای هر x متعلق به بازه (a,b)، $g'(x)\neq 0$ ، آن‌گاه نقطه‌ای مانند c متعلق به بازه (a,b) هست به‌طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

اثبات قضیه:

سطر ۱- با توجه به فرض قضیه در می‌یابیم که باید $g(a)\neq g(b)$.

سطر۲- حال تعریف می‌کنیم $h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)-f(x)$

سطر ۳- تابع $h(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر است.

سطر ۴- همچنین $h(a)=h(b)$.

سطر۵- پس: $h'(c)=0 \quad s.t. \quad \exists\, c\in[a,b]$

سطر۶- اما $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow h'(c)=0$

سطر ۷- بنابراین:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad s.t. \quad \exists\, c\in(a,b)$$

سؤالات

۱- چگونه در سطر ۱ اثبات، از فرض قضیه نتیجه می‌گیریم که باید $\mathbf{g(a) \neq g(b)}$؟

۲- در اثبات قضیهٔ فوق هدف از ارائه سطر ۱ چیست؟

۳- چگونه در سطر ۳ در می‌یابیم $\mathbf{h(x)}$ بر بازه $\mathbf{[a, b]}$ پیوسته و بر بازه $\mathbf{(a, b)}$ مشتق‌پذیر است؟

۴- چه مراحلی از اثبات قضیهٔ فوق، نشان می‌دهد شرایط قضیه رول برقرار است؟

۵- اگر در اثبات قضیهٔ فوق در سطر ۲، $\mathbf{h(x)}$ را چنین تعریف کنیم:

$$\mathbf{h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))}$$

آیا می توان درستی حکم قضیه ، یعنی $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ را نتیجه گرفت؟ چرا؟

۶- فرض کنید فرض قضیه مورد نظر به صورت زیر مطرح گردد؛ اگر توابع $\mathbf{f}$و $\mathbf{g}$بر بازه $\mathbf{[a, b]}$ پیوسته و بر بازه $\mathbf{(a, b)}$ مشتق‌پذیر باشند و اگر به ازای هر $\mathbf{x}$ متعلق به بازه، $\mathbf{(a, b)}$ ، $\mathbf{f'(x) \neq 0}$ آن‌گاه نتیجهٔ قضیه (حکم قضیه) چگونه بیان می‌شود؟

۷- کدام‌یک از توابع زیر بر بازه داده شده، در قضیهٔ فوق صدق می‌کنند (برای ادعای خود، دلیل بیاورید).

الف) $\mathbf{f(x) = x + 1 \ , \ g(x) = x^2 - 1}$ بازهبر $\mathbf{[-2, 1]}$

ب) $\mathbf{f(x) = \frac{(x+2)}{(x-2)} \ , \ g(x) = |x + 1|}$ بر بازه $\mathbf{[-2, 1]}$

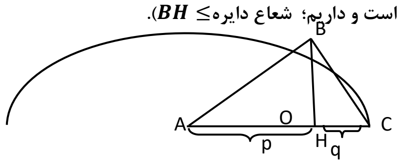
۸- یک دانشجو، قضیهٔ فوق را چنین اثبات کرده است؛

با توجه به فرض قضیه و بنابر قضیه مقدار میانگین به ازای نقطه‌ای مانند $\mathbf{c}$ در بازه $\mathbf{(a, b)}$ داریم: $\mathbf{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ و به همین ترتیب به ازای همین $\mathbf{c}$ در بازه $\mathbf{(a, b)}$ رابطه $\mathbf{\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)}$ برقرار است. بنابراین با تقسیم دو طرف تساوی‌های ذکر شده داریم:

$$\mathbf{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

آیا این پاسخ را به‌عنوان اثبات قضیهٔ مورد نظر قبول می‌کنید؟ چرا؟

۹- به وسیله شکل زیر درستی رابطه $\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}$ را نشان دهید (راهنمایی: $\mathbf{O}$ مرکز دایره و $\mathbf{BH}$ ارتفاع نظیر قاعده $\mathbf{AC}$ است و داریم؛ شعاع دایره$\leq BH$).



شکل ۱–پرسش‌نامهٔ مورد استفاده در تحقیق

سؤالات ۱، ۵ و ۶ از پرسش‌نامه روی، الکاک و انگلس اقتباس شده است ولی انتخاب سایر سؤالات دیگر به کمک پرسش‌نامه روی، الکاک و انگلس و با توجه به مدل مژیا راموس و همکارانش توسط مؤلفان طراحی گردید تا از هم‌پوشانی مناسب این سؤالات با سطوح اثبات مورد نظر برخوردار باشد.

برای هر یک از سؤالات موجود در پرسش‌نامه، اهدافی خاصی مورد نظر بود، لذا این اهداف به دو دستهٔ جنبه‌های موضعی و کلی اثبات تقسیم گردید که در جدول ۲ ارائه شده و متناظر با آن در ستون سوم این جدول، سطوح اثباتِ مدل مژیا راموس و همکارانش نیز بیان گردیده است.

همان‌طور که در جدول۲، مشاهده می‌شود، اهداف پرسش‌نامه دقیقاً منطبق با سطوح اثبات مدل مژیا راموس و همکارانش نیست ولی اهداف سؤالات ذکر شده با سطوح مدل این محققان از هم‌پوشانی مناسبی برخوردارند.

۴– یافته‌های تحقیق

در این پژوهش، برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از روش‌های کمّی و کیفی استفاده شده است. برای تحلیل پاسخ‌های دانشجویان به سؤالات پرسش‌نامه، ابتدا پاسخ‌های ارائه شده کدگذاری گردید. به این صورت که برای هر سؤال، چهار حالت "بدون پاسخ"، "پاسخ اشتباه"، "پاسخ ناقص" و "پاسخ صحیح" در نظر گرفته شد و به هر کدام از این حالت‌ها به ترتیب کد ۱، ۲، ۳ و ۴ اختصاص یافت، سپس با استفاده از نرم‌افزار آماری spss و به کمک روش‌های آماری، به طبقه‌بندی پاسخ‌ها و تنظیم جدول توزیع فراوانی پرداخته شد. در جدول شمارهٔ ۳، فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤالات پرسش‌نامه ارائه می‌گردد.

سطح ۱ - جنبهٔ موضعی

همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، سؤالات ۶ و ۷ پرسش‌نامه، درک دانشجویان را از سطح اول مدل ارزیابی پژوهش حاضر می‌سنجند. با توجه به جدول ۳ ملاحظه می‌گردد، تعداد ۱۰۵ نفر (۶۱٫۸ درصد) از دانشجویان توانسته‌اند صورت قضیه را به درستی درک نمایند. همچنین مشاهده می‌شود اغلب دانشجویان (۵۹٫۴ درصد) توانسته‌اند جزئیات صورت قضیه را درک کنند که البته درک تعداد بیشتر دانشجویان از این تعداد به صورت ناقص بوده است،

جدول ۲– مدل بکاربرده شده در مطالعه‌ی حاضر و مدل مژیا راموس و همکاران

جنبه	سطح	سطوح اثبات بر اساس مدل راموس و همکارانش (۲۰۱۱)	سؤالات پرسش‌نامه	اهداف سؤالات پرسش‌نامه‌ی مطالعه‌ی حاضر
جنبه موضعی	۱	معنی کردن اصطلاحات و گزاره‌های متن اثبات	۶	درک کلی صورت قضیه
			۷	درک جزئیات صورت قضیه
	۲	وضعیت منطقی گزاره‌ها	۴	پیدا کردن ارتباط منطقی بین گزاره ها در فرایند اثبات
			۳	ارتباط منطقی بین قضایا و حقایق مورد قبول
	۳	توجیه ادعا	۱	توجیه درستی یا نادرستی یک گزاره در فرایند اثبات
جنبه کلی	۴	خلاصه کردن مفاهیم اصلی اثبات	۸	پیدا کردن تضاد و ناسازگاری در فرایند اثبات
	۵	معین کردن ساختارهای جزئی	۲	تعیین اهداف یک بخش از اثبات و ارتباط آن با سایر گزاره‌های اثبات
	۶	به کارگیری روش‌های اثبات در زمینه‌های دیگر	۵	درک روش اثبات یک گزاره و بکارگیری آن در شرایط دیگر
	۷	توضیح اثبات با شکل و مثال	۹	توضیح و توجیه یک اثبات از طریق شکل هندسی

جدول ۳–فراوانی پاسخ دانشجویان

فراوانی / سؤال	پاسخ صحیح		پاسخ ناقص	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
۱	۷۷	۴۵,۳	۲۹	۱۷,۱
۲	۸۲	۴۸,۲	۳۷	۲۱,۸
۳	۱۲۵	۷۳,۵	۹	۵,۳
۴	۱۰۸	۶۳,۵	۳۶	۲۱,۲
۵	۴۰	۲۳,۵	۱۷	۱۰
۷	۴۵	۲۶,۵	۵۶	۳۲,۹
۸	۳۶	۲۱,۲	۱	۰,۶
۹	۵۸	۳۴,۱	۱۳	۷,۶

فراوانی / سؤال	پاسخ اشتباه		بدون پاسخ	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
۱	۵۳	۳۱,۲	۱۱	۶,۵
۲	۳۵	۲۰,۶	۱۶	۹,۴
۳	۲۰	۱۱,۸	۱۶	۹,۴
۴	۱۳	۷,۶	۱۳	۷,۶
۵	۴۳	۲۵,۳	۷۰	۴۱,۲
۶	۲۵	۱۴,۷	۴۰	۲۳,۵
۷	۴۲	۲۴,۷	۲۷	۱۵,۹
۸	۷۶	۴۴,۷	۵۷	۳۳,۵
۹	۴۹	۲۸,۸	۵۰	۲۹,۴

در واقع برخی از دانشجویان برای بررسی این‌که توابع f و g در شرایط قضیه A صدق می‌کنند، تنها به پیوستگی و مشتق‌پذیری آن‌ها بسنده کرده‌اند و به شرط دوم فرض، یعنی $g'(x) \neq 0$ و بازهٔ داده شده توجه نداشته‌اند.
با توجه به پاسخ دانشجویان به نظر می‌رسد یکی از دلایل عدم توانایی دانشجویان در درک جزئیات قضیه، ضعف دانش پایه‌ای آن‌ها می‌باشد. با وجود این شرایط، باز می‌توان ادعا کرد که تعداد قابل توجهی از دانشجویان به سطح ۱ از جنبهٔ موضعی دست یافته‌اند.

سطح۲- جنبهٔ موضعی

با توجه به جدول ۲ مشاهده می‌شود سؤالات ۳ و ۴ پرسش‌نامه، درک دانشجویان را از سطح دوم مدل ارزیابی پژوهش حاضر می‌سنجد. نتایج حاصل از جدول ۳ نشان می‌دهد از بین شرکت‌کنندگان در این تحقیق تعداد ۱۰۸ نفر (۶۳,۵ درصد) از آن‌ها توانسته‌اند بین چند گزارهٔ خاص در فرایند اثبات، ارتباط برقرار کنند. همچنین تعداد ۱۲۵ نفر (۷۳,۵ درصد) از دانشجویان نیز توانسته‌اند ارتباط بین قضایا و حقایق قابل قبول را درک نمایند. بنابراین این نتیجه حاصل می‌شود که اکثر

دانشجویان توانسته‌اند بین چند گزارهٔ خاص در فرایند اثبات ارتباط برقرار کنند و همچنین ارتباط بین قضایا و حقایق قابل قبول را درک نمایند.

سطح۳- جنبهٔ موضعی

بر اساس جدول ۲، سؤال ۱ پرسش‌نامه، درک دانشجویان را از سطح سوم مدل ارزیابی پژوهش حاضر می‌سنجد. نتایج حاصل از جدول ۳ بیانگر آن است که تعداد ۷۷ نفر (۴۵,۳ درصد) از دانشجویان توانسته‌اند توجیه مناسبی برای این سؤال بیان کنند و تعداد دانشجویانی هم که نتوانسته بودند توجیه قابل قبولی ارائه دهند، چنین استدلال می‌کرده‌اند؛

"در صورتی که $g(a) = g(b)$، نمی‌توان حکم قضیه را چنین نتیجه گرفت و یا این‌که $h(x)$ را چنین تعریف کرد، زیرا در هر دو حالت مخرج کسر صفر می‌شود".

عدم موفقیت دانشجویان در پاسخ به سؤال اول را می‌توان ناتوانی آن‌ها در تشخیص فرض و حکم قضیه دانست، زیرا با توجه به پاسخ‌های نادرست این‌گونه استنتاج می‌شود که بیشتر دانشجویان در توجیه خود به حکم قضیه توجه داشتند تا آنچه که در فرض قضیه بیان شده است و دیگر این‌که، به نظر می‌رسد آن‌ها تسلط و آگاهی کافی از روش برهان خلف در توجیه یک ادعا نداشته‌اند.

سطح۴- جنبهٔ کلی

با توجه به جدول ۲، سؤال ۸ پرسش‌نامه، درک دانشجویان را از سطح چهارم مدل ارزیابی پژوهش حاضر می‌سنجد. نتایج حاصل از جدول ۳ بیانگر آن است که درصد زیادی از دانشجویان در پیدا کردن تضاد و ناسازگاری در یک اثبات ناتوان بودند. در حقیقت تنها ۳۶ نفر (۲۱,۲ درصد) از آن‌ها توانسته‌اند به ایدهٔ انحرافی اثبات دانشجوی مذکور در سؤال ۸ پی ببرند. با بررسی پاسخ‌های دانشجویان، به نظر می‌رسد یکی از دلایل ضعف آن‌ها در این سؤال می‌تواند عدم توجه آن‌ها به فرض قضیه باشد. دو نمونه از پاسخ اشتباه دانشجویان به سؤال ۸ در شکل ۲ ارائه شده است.

پاسخ اشتباه: نمونهٔ ۱

خیر، چون در اثبات این دانشجو به مخالف صفر بودن $g'(x)$ اشاره نشده است و ممکن است $g'(x) = 0$ شود. پس اثبات قابل قبول نیست.

نمونهٔ ۲

کاملاً درست است زیرا طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$\exists\, c \in (a,b):\ (b-a)\, f'(c) = f(b) - f(a)$ و $\exists\, c \in (a,b):\ (b-a)g'(c) = g(b) - g(a)$

با تقسیم این دو رابطه داریم:

$$\frac{(b-a)\, f'(c)}{(b-a)g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

شکل۲- چند نمونه از پاسخ اشتباه دانشجویان به سؤال ۸

سطح۵- جنبهٔ کلی

جدول ۲ نشان می‌دهد که سؤال ۲ پرسش‌نامه، درک دانشجویان را از سطح پنجم مدل ارزیابی پژوهش حاضر می‌سنجد. نتایج حاصل از جدول ۳ گویای آن است که تعداد ۸۲ نفر (۴۸,۲ درصد) از دانشجویان بر اساس مدل ارزیابی پژوهش حاضر به این سطح از اثبات دست یافته‌اند. در واقع می‌توان گفت نیمی از دانشجویان توانسته‌اند اهدف یک بخش از اثبات را تعیین نمایند و به ارتباط آن با سایر گزاره‌های اثبات دست یابند.

سطح ۶- جنبهٔ کلی

این سؤال از بخش اول پرسش‌نامه بر اساس جدول ۲، درک دانشجویان را از سطح ششم مدل ارزیابی پژوهش حاضر می‌سنجد. نتایج حاصل از جدول ۳ نشان می‌دهد که اکثر دانشجویان در درک مراحل اثبات یک گزارهٔ ریاضی و به کار بردن روش آن در شرایط جدید از توانایی کافی برخوردار نیستند زیرا پاسخ اکثر دانشجویان یا اشتباه بوده یا نتوانسته‌اند هیچ پاسخی برای این سؤال ارائه دهند. بررسی پاسخ دانشجویان نشان می‌دهد که آن‌ها با وجود این‌که توانسته‌اند بین چند قضیه یا گزاره خاص ارتباط برقرار کنند، ولی در سازماندهی گزاره‌های اثبات برای رسیدن به یک نتیجهٔ معتبر ناتوان بودند. همچنین به نظر می‌رسد از دلایل دیگر ضعف دانشجویان می‌تواند بدفهمی آن‌ها از قضایا و ناتوانی‌شان در ارائه استدلال منطقی باشد. چند نمونه از پاسخ ناقص و اشتباه دانشجویان به سؤال ۵ در شکل ۳ ارائه شده است.

پاسخ ناقص: نمونهٔ ۱

بله، زیرا شرایط قضیهٔ رول را دارد و همچنین از $h'(c) = 0$ می‌توان عبارت مورد نظر را نتیجه گرفت.

نمونهٔ ۲

بله، چون داریم:

$$h(a) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a))$$ **و**

$$h(b) = (g(b) - g(a))(f(b) - f(a))$$

پس خواهیم داشت: $h(a) = h(b)$

نمونهٔ ۳

بله، زیرا $h(x)$ در بازهٔ [a,b] پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است. همچنین داریم $h(a) = h(b)$

پاسخ اشتباه: نمونهٔ ۴

خیر، زیرا در این صورت در بازهٔ مورد نظر پیوسته و مشتق‌پذیر نخواهد بود.

نمونهٔ ۵

خیر، زیرا در این صورت $h(a) \neq h(b)$ و تابع h در قضیهٔ رول صدق نخواهد کرد.

نمونهٔ۶ خواهیم داشت:

اشتباه است، زیرا تفاضل دو تابع پیوسته ممکن است پیوسته نباشد.

نمونهٔ ۷

خیر، زیرا با توجه به تعریف $h(x)$ می‌دانیم که $h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x) - f(x)$ و $h(x)$ را که در بالا تعریف شده است نمی‌توان در یک عبارت ضرب کرد تا صورت $h(x)$ را در تعریف قضیه به دست آو رد.

شکل ۳- چند نمونه از پاسخ ناقص و اشتباه دانشجویان به سؤال ۵

سطح ۷- جنبهٔ کلی

با توجه به جدول ۲ مشاهده می‌شود آخرین سؤال از بخش اول پرسش‌نامه، درک دانشجویان را از آخرین سطح مدل ارزیابی پژوهش حاضر می‌سنجد. بر اساس داده‌های موجود در جدول ۳، این نتیجه حاصل می‌شود، تعداد دانشجویانی که توانسته‌اند شکل مورد نظر در سؤال ۹ را از طریق روابط هندسی توجیه کنند در حد مطلوبی نمی‌باشد. زیرا تنها ۵۸ نفر (۳۴,۱ درصد) از آن‌ها توانسته بودند به این سؤال پاسخ صحیح دهند. به نظر می‌رسد از دلایل ضعف برخی از دانشجویان در پاسخگویی به این سؤال، می‌تواند فقدان دانش پایه‌ای و دانش محتوایی آن‌ها باشد. حتی برخی از آن‌ها با اینکه دانش محتوایی لازم را داشتند ولی باز در به کارگیری آن ناتوان بودند. همچنین بر اساس نتایج پاسخ دانشجویان مشاهده می‌شود، برخی از آن‌ها تنها به نمادین بودن راه‌حل خود بسنده کرده‌اند بدون این‌که رویهٔ به کاربرده شده، مفهومی صحیح داشته باشد. شکل ۴ چند نمونه از پاسخ دانشجویان به سؤال ۹ را نشان می‌دهد.

پاسخ ناقص: نمونهٔ ۱

$p + q \geq$ دایره قطر $= BH$ (1)

با توجه به شکل نیم دایره

$BH^2 + p^2 = AB^2$ **داریم:** (2)

$BH^2 + q^2 = BC^2 \quad \Rightarrow$ (3)

$BC^2 + AB^2 = (p + q)^2$

$$2\,BH^2 + p^2 + q^2 = (p + q)^2$$
$$2\,BH^2 = 2pq \quad \Rightarrow \quad BH = \sqrt{pq}$$
$$(p + q)^2 \geq BH^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{pq} \leq (p + q)^2$$

پاسخ اشتباه: نمونهٔ ۲

اگر $q = r - f \quad , \quad p = r + f$ و $r =$ شعاع دایره

f ممکن است گنگ یا گویا باشد

$$\sqrt{(r + f)(r - f)} \leq r \quad \Rightarrow \quad \sqrt{r^2 - f^2} \leq r$$
$$\Rightarrow \quad r^2 - f^2 \leq r^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f^2$$

رابطه بازگشت‌پذیر است

نمونهٔ ۳

$$p + q \geq 2\sqrt{pq} \quad \Rightarrow \quad (p + q)^2 \geq 4pq$$
$$\Rightarrow \quad p^2 + q^2 + 2pq \geq 4pq \quad p^2 + q^2 \geq 2pq$$
$$\Rightarrow \quad (p + q)^2 \geq 0$$

شکل ۴–چند نمونه از پاسخ ناقص و اشتباه دانشجویان به سؤال ۹

۵–بحث و نتیجه‌گیری

بر اساس یافته‌های به دست آمده از نتایج پاسخ دانشجویان و تحلیل آن طبق مدل ارزیابی پژوهش حاضر، این نتیجه حاصل می‌شود که اکثر دانشجویان به جنبهٔ موضعی اثبات دست یافته‌اند. در حقیقت اکثر آن‌ها توانسته‌اند به جزئیات صورت قضیه پی‌ببرند و چارچوب کلی صورت قضیه را درک نمایند. همچنین آن‌ها می‌توانند رابطهٔ بین مفاهیم و گزاره‌های اثبات را درک کنند و ارتباط بین چند گزارهٔ خاص را نشان دهند و توجیه مناسبی برای درستی یا نادرستی یک گزارهٔ ریاضی بیان نمایند؛ ولی تعداد قابل توجهی از دانشجویان در درک جنبهٔ کلی اثبات ضعیف عمل کرده‌اند. در واقع اکثر آن‌ها در فهم روند منطقی اثبات مشکل دارند و به‌طور کلی چارچوب منطقی اثبات را درک نکرده‌اند. با توجه به نتایج پاسخ دانشجویان و نتایج تحقیقات دیگر ([۵]، [۲۰]، [۲۱]) شاید بتوان دلایل این ضعف را عدم

توجه دانشجویان به فرض قضیه، ناتوانی آن‌ها در سازماندهی منطقی گزاره‌های اثبات برای رسیدن به یک نتیجهٔ معتبر و از همه مهم‌تر ضعف دانش پایهٔ آن‌ها دانست. به‌طور کلی، به نظر می‌رسد برخی از مشکلاتی که دانشجویان در درک و فهم فرایند اثبات ریاضی در قضیهٔ مورد نظر با آن مواجه بوده‌اند، عبارتند از:

- ناتوانی دانشجویان در تشخیص فرض و حکم قضیه؛
- فقدان دانش محتوایی و دانش پایه؛
- عدم آگاهی آن‌ها از انواع روش‌های اثبات؛
- عدم توجه به فرض قضیه؛
- ناتوانی در سازماندهی کردن گزاره‌های اثبات برای رسیدن به یک نتیجهٔ معتبر؛
- بدفهمی از قضایا و مفاهیمی که از قبل یاد گرفته‌اند؛
- ناتوانی در ارائهٔ استدلال منطقی؛
- عدم توانایی در به کار بردن دانش محتوایی؛
- تمرکز روی رویه‌ها و شکل نمادین اثبات به جای تأکید متوازن روی رویه و مفهوم.

قابل توجه است، مشکلاتی که دانشجویان پژوهش حاضر در زمینهٔ درک فرایند اثبات ریاضی داشته‌اند، از دسته مشکلاتی است که محققانی از قبیل مور، وبر، دی‌وانس‌پرونسن، هارل و ساودر و هارو، در نتایج پژوهش خود روی درک دانشجویان از اثبات‌های ریاضی مشاهده کرده‌اند([۵]، [۶]، [۱۲]، [۱۹]، [۲۱]).

همان‌گونه که می‌دانیم ریاضیات دانشی زنجیره‌وار است و عدم درک مفاهیم پایه، توانایی افراد را در درک مفاهیم بالاتر سلب می‌کند. لذا ضروری است که برای اثبات یک قضیه، تمام مفاهیم و قضایا و تعاریف مرتبط با آن قضیه توسط دانشجویان درک شود و بدفهمی‌هایی که ممکن است آن‌ها در برخی از مفاهیم داشته باشند اصلاح گردد. علاوه براین، با توجه به مدل مژیا راموس و همکاران و نتایج ارائه شده در این مطالعه می‌توان استنباط کرد که ضعف دانشجویان در برخی از سطوح اولیه جنبه‌های موضعی اثبات مانعی برای رسیدن به جنبه‌های کلی اثبات می‌شود. لذا بهتر است که استادان و معلمان ریاضی قبل از شروع اثبات یک قضیه، دانش قبلی دانشجویان را در ارتباط با قضیهٔ مورد نظر، بررسی نمایند و مفاهیم پیش‌نیاز قضیهٔ اصلی را متذکر شوند و آن‌ها را از ضرورت استدلال‌های منطقی و اثبات‌ها آگاه سازند. به‌علاوه به جای تمرکز روی پاسخ نهایی دانشجویان در اثبات یک قضیه، به فرایند اثبات آن‌ها توجه نمایند، زیرا آگاهی از درک یادگیرندگان از فرایند اثبات می‌تواند روش تفکر و نقاط قوت و ضعف آن‌ها را به خوبی مشخص نماید. همچنین با توجه به این‌که مطالعات بسیار کمی در زمینهٔ بررسی فرایند اثبات دانشجویان در ایران انجام گرفته است، یکی از اهداف مؤلفان در مطالعهٔ حاضر این است که نشان دهند مدل مورد استفاده در این تحقیق می‌تواند درک دانشجویان را از فرایند اثبات ریاضی ارزیابی نماید و به‌عنوان یک ابزار سنجش استدلال و اثبات دانشجویان، مورد استفادهٔ آموزشگران ریاضی قرار گیرد.

۵- پی نوشت

[1] Roy
[2] Alcock & Inglis
[3] Mejia-Ramos
[4] Weber & Fuller & Rhoads & Samkoff
[5] Ball & Bass
[6] Ross
[7] Polya
[8] Moore
[9] concept images
[10] Anapa
[11] Samkar
[12] justify
[13] systemization
[14] discovery
[16] communication
[17] Problem Solving
[18] Intellectual challenge
[19] Transfer
[20] Critical Thinking
[21] providing autonomy
[22] Dee Vanspronsen
[23] Mcnamra
[24] Hawro
[25] Conradie and Frith
[26] comprehension test
[27] local comprehension of a proof
[28] holistic comprehension of a proof
[29] Meaning of terms and statements
[30] Selden & Selden
[31] Logical status of statements and proof framework
[32] Yang and Lin
[33] Justification of claims
[34] summarizing the main idea of the proof
[35] Identifying the modular structure

[36] Transferring the general ideas or methods to another
[37] Illustrating with examples

۶- ۷- منابع

[1] polya, G., How to solve the problem (translated by Ahmad Aram) (Eighth Edition. (Tehran: kayhan) publication of 1954), 1386.[In Persian].

[2] National Council of Teachers of Mathematics, ed. *Principles and standards for school mathematics*. Vol. 1. National Council of Teachers of, (2000).

[3] Kolahdooz, F.,Evaluation of students understand second year high school from the reasoning and mathematical proofs. MA thesis Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training, Basic Sciences, Tehran, Iran, . (1390) .[In Persian].

[4] zamani Abyaneh, A. ,the role of reasoning and proof in teaching school mathematics. MA thesis in mathematics education, Shahid Beheshti University, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Tehran, Iran, (1386) [In Persian].

[5] Moore, Robert C. "Making the transition to formal proof." *Educational Studies in mathematics*, Vol. 27, No. 3 ,(1994), pp. 249-266.

[6] Harel, Guershon, and Larry Sowder. "Students' proof schemes: Results from exploratory studies." *Research in collegiate mathematics education III* 7 ,(1998), pp. 234-282.

[7] Selden, John, and Annie Selden. "Unpacking the logic of mathematical statements." *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 29, No. 2 ,(1995), pp. 123-151.

[8] Mejía-Ramos, Juan Pablo, and Matthew Inglis. "Argumentative and proving activities in mathematics education research." *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education*. Vol. 2. (2009).

[9] Anapa, Pınar, and Hatice Şamkar. "Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof." *Procedia-Social and Behavioral Sciences* Vol. 2, No. 2, (2010), pp. 2700-2706.

[10] Mejia-Ramos, Juan Pablo, et al. "An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics." *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 79, No.1 (2012), pp. 3-18.

[11] Hanna, Gila, and Ed Barbeau. "Proofs as bearers of mathematical knowledge," *ZDM* , Vol. 40, No. 3, (2008), pp. 345-353.

[12] Weber, K., Students' difficulties with proof. MAA Online: Research Sampler, Cited from http://www.maa.org, (2003).

[13] Roy, S., Alcock, L., and Inglis, M., Undergraduates' proof comprehension: A comparative study of three forms of proof presentation. Paper presented at the Thirteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Raleigh, NC, (2010).

[14] Varghese, T., Student teachers conception of mathematical proof. Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada, (2007).

[15] Mingus, T. T. Y., and Grassl, R. M., Preservice teacher beliefs about proofs, *School Science and Mathematics*, Vol. 99, No. 8, (1999), pp. 438-444.

[16] Hemmi, K.,Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational studies in mathematics*, Vol. 75, No. 3, (2010), pp. 271-291.

[17] Gholamazad, .S, goya, Z., roles Proof in school mathematics the curriculum, Journal of Mathematics Education, Vol. 83, (1385), pp. 10-4. [In Persian].

[18] Fathollahi, F., A Study on Mathematics Proofprocesses Conception of undergraduates and Their attitudes about Mathematics Proof. MA thesis Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training, Basic Sciences, Tehran, Iran, (1392). [In Persian].

[19] Dee Vanspronsen, H. , Proof processes of novice mathematics proof writers, Unpuplished doctoral dissertation, university of Montana,USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations, (2008).

[20] McNamara, D. S. , Reading both high-coherence and low-coherence texts: Effects of text sequence and prior knowledge, *Canadian Journal of Experimental Psychology*, Vol. 55, No. 1, (2001), pp. 51-62.

[21] Hawro, J. ,University students' difficulties with formal proving and attempts to overcome them. In CERME 5, (2007), pp. 2290-2299.

[22] Yang, K.-L., and Lin, F.-L., A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 67, No. 1, (2008), pp. 59-76.