

# بررسی عملکرد دانش آموزان سال اول متوسطه

## در حل مسائل تعمیم جبری

ابراهیم ریحانی<sup>۱</sup> و مریم صدیقی<sup>۲</sup>

**چکیده:** هدف از پژوهش حاضر، بررسی عملکرد دانش آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری است. جامعه مورد مطالعه این پژوهش، دانش آموزان سال اول متوسطه شهرستان مبارکه است. نمونه مورد مطالعه، ۸۰ نفر از دانش آموزان سال اول متوسطه دبیرستان‌های دخترانه است که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند. داده‌های این پژوهش از پاسخ دانش آموزان به سوالاتی در ارتباط با تعمیم جبری، گردآوری شده است. تحقیق حاضر از نوع کیفی و روش تحقیق مورد استفاده، توصیفی-تحلیلی با استفاده از تحلیل محتوا می‌باشد. یافته‌ها نشان داد که دانش آموزان در محاسبه عددی موارد خاص و شبه تعمیم‌ها، موفق‌تر از تعمیم‌های کلی بودند. همچنین دانش آموزان راهبردهای مختلفی شامل "حدس و آزمایش، رسم شکل، شمارش، تناسب، جایگزینی، بازگشتی، موضوع کلی، تنظیم روش، زمینه‌ای و خطی" را به صورت درست یا نامربوط برای رسیدن به تعمیم به کار بردند. با این حال بخش قابل ملاحظه‌ای از راه حل‌های درست ارائه شده برای برخی از مسائل مبتنی بر تفکر تجسمی است. از عمده‌ترین مشکل دانش آموزان در تعمیم جبری، می‌توان به عدم آشنایی آنان با مفهوم متغیر اشاره کرد.

**کلمات کلیدی:** جبر، تعمیم جبری، راهبرد، دانش آموزان، حل مسأله

### ۱- مقدمه

جبر، یکی از شاخه‌های ریاضی است که تقریباً جایگاه ثابتی در ریاضیات مدرسه‌ای داشته است. جبر از یک طرف ابزاری برای حل مسأله فراهم می‌کند و از طرف دیگر با فعالیت‌های انسانی ارتباط دارد. جبر از دیدگاه بسیاری از افراد «حساب همراه حروف»<sup>۱</sup> در نظر گرفته شده است [۱]. یوسیسیسکین جبر را یک زبان می‌داند که پنج جنبه مهم «مجهولات، فرمول‌ها، تعمیم الگوها، متغیرها و روابط» را شامل می‌شود [۲]. از نظر کلینر در حدود سه هزاره، تا اوایل قرن نوزدهم، جبر به معنی حل معادلات چند جمله‌ای به طور عمده از درجه چهار یا کمتر در نظر گرفته می‌شد [۳]. از جنبه تاریخی جبر به عنوان ابزاری برای سر و کار داشتن با مجهول پدیدار شد [۱]. لی در مطالعه‌ای با عنوان «در جستجوی درک جبری»، در مورد اینکه «جبر چیست؟» نظرات دانش آموزان، معلمان، ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی را جمع بندی کرد. از مطالعه او، جبر از دیدگاه این افراد، یک

موضوع مدرسه‌ای، تعمیم حساب، یک ابزار، یک زبان، یک فرهنگ، یک روش فکر کردن و یک فعالیت انگاشته شد [۴]. شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM، ۲۰۰۰) جبر را در برگیرنده ارتباط بین کمیت‌ها، کاربرد نمادها، مدل سازی پدیده‌ها و مطالعه ریاضی تغییر می‌داند [۵]. مهارت تعمیم دادن و فرمول بندی فعالیت‌های ریاضی در رشد تفکر ریاضی از اهمیت خاصی برخوردار است. عمل تعمیم، کاملاً به عمل تجرید وابسته است [۶]. با آن که بر سر یک تعریف واحد در مورد تعمیم توافق نشده است، با این حال کوشش‌های زیادی برای ارائه یک توصیف مناسب از تعمیم انجام شده است. از نظر پولیا تعمیم عبارت از گذشتن از ملاحظه یک چیز، به ملاحظه دسته‌ای از چیز-هاست که آن چیز یکی از آن‌ها به شمار می‌رود. یا می‌توان گفت گذشتن از ملاحظه یک دسته محدود به ملاحظه دسته فراگیرتری است که آن دسته محدود را نیز شامل است [۷]. تعمیم به مثابه یک فرآیند و به شکل یک محصول آموزش ریاضی، اهمیت و ارزش خود را به عنوان یک هدف آموزشی داراست [۸]. میسون ادعا می‌کند که «تعمیم ضربان قلب ریاضیات است. اگر معلمان از وجود و حضور آن آگاه نباشند و تمایل به عادت دادن دانش آموزان

تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۰۱/۲۸، تاریخ تصویب نهایی ۹۱/۰۷/۲۹

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، (نویسنده مسئول)، پست الکترونیک: e\_reyhani@srttu.edu

<sup>۲</sup> کارشناسی ارشد، آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

- موقعیت‌ها و ساختارهای ریاضی را با استفاده از نمادهای جبری بازنمایی و تجزیه و تحلیل کنند؛

- مدل‌های ریاضی را برای بازنمایی و درک روابط کمی به کار برند؛

- تغییر را در زمینه‌های گوناگون مورد مطالعه قرار دهند [۵].

دانش‌آموزان با استفاده از شباهت ویژگی‌ها، روابط و خواص بین موضوعات، می‌توانند ویژگی‌ها و روابط کلی تری را بیان کنند. مسائل تعمیم می‌تواند در همه مقاطع تحصیلی مطرح شود و منجر به رشد تفکر جبری گردد. دانش‌آموز ابتدایی می‌تواند خواص و ویژگی‌های دستگاه اعداد همچون خواص جابجایی عمل ضرب و جمع را بیان کند و همچنین با تعمیم‌های عددی به درک مفهوم تابع نزدیک شود و با مسائلی همچون جاهای خالی در روابط و اعمال ریاضی، مفهوم متغیر در جبر را درک کند. دانش‌آموزان در سطح بالاتر می‌توانند تعمیمی برای معادلات و عبارات جبری و نوشتن قوانین و روابط بین موضوعات ریاضی یا مسائل روزمره داشته باشند. نتایج تحقیقات نشان می‌دهند موفقیت در تعمیم، وابسته به درک دانش‌آموزان از مفهوم متغیر است و مفهوم متغیر نیاز به یک تفکر انتزاعی گسترده دارد [۱۲].

طبق نظر کیپرن فعالیت‌های جبر مدرسه‌ای را می‌توان به طور کلی در سه دسته تعمیمی، تبدیلی و فراسطحنی - کلی<sup>۴</sup> طبقه بندی کرد [۱۴ و ۴].

**فعالیت‌های تعمیمی:** تمرکز فعالیت‌های تعمیمی، بازنمایی (و تفسیر) ویژگی‌ها، الگوها و روابط است. فعالیت‌های تعمیمی شامل تشکیل عبارات و معادلاتی است که موضوعات جبر هستند. مثال‌های نمونه عبارتند از:

- معادلات شامل یک مجهول که موقعیت‌های مسأله‌ای کمی را نشان می‌دهند.

- عبارات تعمیم که از الگوهای هندسی یا دنباله‌های عددی ناشی می‌شوند.

- عبارات جبری که از روابط عددی ناشی می‌گردند.

**فعالیت‌های تبدیلیاتی:** دسته دوم فعالیت‌های جبری (فعالیت‌های تعمیمی (قاعده محور)) شامل جمع عبارات متشابه، فاکتورگیری، بسط دادن، جایگزینی، جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها، به توان رساندن چندجمله‌ای‌ها، حل

به بیان تعمیم‌های خودشان نباشند، تفکر ریاضی اتفاق نمی‌افتد» [۹]. کاپوت تعمیم را به عنوان، توسعه استدلال یا ارتباط با سطحی که دیگر روی موارد یا مسائل خودشان متمرکز نیست، بلکه، ترجیحاً روی الگوها، رویه‌ها، ساختارها و روابط بین شان متمرکز است، تعریف می‌کند [۱۰]. فهم تعمیم و بیان تعمیم دو موضوع متفاوت هستند که هر کدام به نوبه خود با اهمیت هستند. از نظر رادفورد این دو موضوع توسط معلمان ممکن است با هم اشتباه گرفته شود [۱۱]. کوپر و وارن ابراز می‌دارند که در بسیاری از مواقع مشکلات دانش‌آموزان در بیان تعمیم و نه در شناسایی آن است [۶]. دانش‌آموزان اغلب فاقد زبانی هستند که با آن در مورد تعمیم بحث کنند. در صورت آموزش مناسب (حداقل در شکل‌های زبانی و شبه تعمیم)<sup>۳</sup>، دانش‌آموزان دوره ابتدایی و میانی می‌توانند یاد بگیرند ساختارهای قوی ریاضی را درک کنند که به طور معمول پشتوانه‌ای برای دوره متوسطه است [۶].

مهارت تعمیم در جبر می‌تواند به رشد تفکر جبری کمک شایانی نماید. فوجی معتقد است دانش‌آموزان از دوره ابتدایی می‌توانند با تفکر جبری از طریق عبارات قابل تعمیم آشنا شوند [۱۲]. در واقع می‌توان گفت، هنگامی که دانش‌آموزان بر اساس تجزیه و تحلیل‌های منظم از موارد خاص، تعمیم‌هایی در مورد اینکه، حاصل جمع دو عدد زوج و فرد، عددی فرد است ارائه کنند و یا هنگامی که ویژگی‌های دستگاه اعداد مانند خاصیت جابجایی عمل جمع و ضرب را بیان می‌کنند، دارای تفکر جبری هستند.

**تعمیم جبری:** اهمیت تعمیم به عنوان یک فعالیت جبری، به‌طور گسترده با تحقیق روی یادگیری و یاد دهی جبر مشخص شده است. فوجی بیان می‌کند «در تفکر جبری، لزوماً دانش‌آموزان با الگوهایی از تعمیم سرو کار دارند» [۱۲]. آموزش جبر در مدرسه می‌تواند فرصت‌های مناسبی برای دانش‌آموزان در تعمیم دادن فراهم کند. اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه (NCTM, ۲۰۰۰) درباره جبر مدرسه‌ای معتقد است که برنامه‌های آموزشی از پیش دبستان تا پایان پایه دوازدهم باید همه دانش‌آموزان را قادر سازد تا:

- الگوها، روابط و توابع را درک کنند؛

کار می برند، در تعمیم موفق تر هستند [۱۷]. از عواملی که بر موفقیت دانش آموزان در تعمیم فعالیت های الگو یابی مؤثر است، تجسم خوب و دقیق از الگوی شکلی بیان شده است [۱۸].

هدف این مقاله بررسی عملکرد دانش آموزان اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری و تشخیص راهبردهایی است که توسط آن ها مورد استفاده قرار گرفته اند. همچنین این پژوهش به دنبال آن است تا برخی از عواملی را که باعث توفیق یا شکست دانش آموزان در تعمیم می شود را معلوم کند.

## ۲- روش تحقیق

### سؤالات پژوهش:

۱- چه عواملی موجب شکست یا موفقیت دانش آموزان در تعمیم می شود؟

۲- دانش آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری از چه راهبردهایی استفاده می کنند؟

**روش پژوهش و جمع آوری اطلاعات:** تحقیق حاضر، از نوع کیفی و روش تحقیق آن توصیفی- تحلیلی با استفاده از تحلیل محتوا می باشد. جامعه آماری این تحقیق دانش آموزان دختر سال اول متوسطه شهرستان مبارکه می باشد. در این پژوهش از روش نمونه گیری تصادفی خوشه ای چند مرحله ای برای انتخاب نمونه استفاده شد. بدین صورت که، ابتدا به منظور کنترل متغیر روش تدریس معلمان، از میان ۱۶ دبیرستان دخترانه، سه دبیرستان با توجه به نوع منطقه و تعداد کلاس ها و تفاوت دبیران انتخاب شدند. سپس از میان دانش آموزان کلاس ها به صورت کاملاً تصادفی، هشتاد نفر شامل چهل نفر از مدرسه اول و بیست نفر از هر یک از مدارس دوم و سوم انتخاب شدند.

**ابزار پژوهش:** ابزار اندازه گیری با توجه به ماهیت و روش پژوهش، آزمونی شامل دوازده سؤال در ارتباط با تعمیم جبری است. این سؤالات با دسته بندی کییرن از فعالیت های جبر مدرسه ای در ارتباط با تعمیم مطابقت دارد [۱۴ و ۱۵]. به منظور جمع آوری داده ها از برگه های آزمون، فرم هایی برای هر سؤال تهیه شد و اطلاعات آن استخراج گردید. همچنین از مصاحبه سازمان نیافته و غیررسمی، برای تایید بعضی از نتایج پژوهش استفاده شده است.

معادلات، ساده کردن عبارات، کار با عبارات هم ارز و مانند آن است [۴]. دانش آموزان با تکرار و تمرین در این گونه فعالیت ها مهارت می یابند و اغلب آنان جبر را منحصر به این فعالیت ها می دانند.

**فعالیت فراسطحی:** فعالیت هایی هستند که جبر در آن ها به عنوان یک ابزار به کار برده می شود؛ ولی منحصر به جبر نیستند. آنها شامل حل مسأله، مدلسازی، توجه به ساختارها، مطالعه تغییر، تعمیم، تجزیه و تحلیل روابط، توجیه کردن، اثبات کردن و پیش بینی کردن هستند؛ فعالیت هایی که می توان بدون استفاده از جبر هم درگیر آن ها شد [۴].

برای الگوها و جداول عددی، لنین دو نوع تعمیم بازگشتی و صریح را تشخیص می دهد که رادفورد ادعا می کند که هر یک از این نوع تعمیم ها از سه طریق ایجاد می شود [۱۵ و ۱۶].

۱- تعمیم واقعی که شامل فعالیت های عددی است که دانش آموزان را به درگیر شدن با موارد خاص قادر می سازد.

۲- تعمیم زمینه ای که روی عبارات توصیفی و مجردتر هم چون «شکل بعدی» متمرکز می شود و به عنوان زبانی برای بیان تعمیم استفاده می شود.

۳- تعمیم نمادین که در آن نماد سازی جبری (شامل درک و به کار گیری زبان جبری) برای بیان تعمیم استفاده می شود.

در حالیکه بسیاری از محققان تعمیم تجربی را مورد انتقاد قرار می دهند رادفورد اظهار می دارد که تعمیم واقعی یک زیر بنای مهم برای صورت های پیچیده تر از تعمیم است [۱۶]. بیکر و ریورا روش های دانش آموزان برای تعمیم یک الگو را در سه دسته شکلی، عددی و عملی طبقه بندی کردند [۱۳]. آنها ملاحظه کردند، دانش آموزانی که در تعمیم هایی که با استفاده از الگوهای عددی شروع می شد، موفق نبودند، نمی توانستند ارتباط بین بازنمایی های مختلف را تشخیص دهند. این با یافته های لنین سازگار است که نتیجه گرفت، دانش آموزانی که با استفاده از طرح های هندسی (الگوهای شکلی)، «قانون<sup>۵</sup>» را به بازنمایی های بصری پیوند می زنند، نسبت به دانش آموزانی که اصولاً رویه و طرح شان عددی است یا راهبرد «حدس و آزمایش<sup>۶</sup>» را به

**روایی و پایایی آزمون:** برای تعیین روایی محتوایی و صوری آزمون پایانی، پس از تدوین اولیه سؤالات، آزمونی از بیست نفر از دانش‌آموزان سال اول متوسطه صورت گرفت. پس از بررسی نتایج و مطابقت با اهداف تحقیق، اصلاحات و تغییرات لازم در متن سؤالات انجام شد. همچنین برای روایی محتوایی و صوری آزمون از نظرات چند تن از اساتید دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دو تن از اعضای گروه ریاضی استان اصفهان استفاده گردید و آزمون نهایی تدوین شد. سرانجام برای پایایی آزمون از آزمون آلفای کرونباخ استفاده گردید. این محاسبه با نرم افزار SPSS صورت گرفت و مقدار  $0/849$  بدست آمد. این مقدار نمایانگر این است که اعتبار آزمون در سطح بالایی است و قابلیت اعتماد لازم را دارد.

### ۳- نتایج و بحث

#### ۳-۱- بررسی و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون تعمیم

برای بررسی و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان، نتایج بدست آمده به همراه یکی از سؤالات هر بخش تشریح می‌شود. بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات بخش یک<sup>۱</sup> (سؤال ۱) فرض کنید تعداد دانش‌آموزان مدرسه‌ای، ۶ برابر تعداد معلمان آن مدرسه است. رابطه‌ای بین تعداد معلمان و دانش‌آموزان آن مدرسه به زبان ریاضی ارائه کنید.

جدول ۱ بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات بخش یک

درصد افرادی که رابطه‌ای ریاضی نوشتند.	۴۶/۲۵٪
درصد افرادی که رابطه ریاضی را درست نوشتند.	۳۱/۲۵٪
درصد افرادی که هیچ‌گونه رابطه ریاضی ارائه نکردند.	۵۳/۷۵٪
درصد افرادی که رابطه را به صورت رابطه تابعی $y=6x$ نوشتند.	۲۰٪
درصد افرادی که رابطه را به صورت عبارت $6x$ نوشتند.	۱۱/۲۵٪
درصد افرادی که با استفاده از حروف مناسب، رابطه‌ای غلط ارائه کردند.	۱۰٪

در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال ملاحظه شد که: **الف)** تفکر مسلط در بین دانش‌آموزان، تفکر حسابی است. برخی از آن‌ها، چنین استدلال کرده‌اند که چون تعداد معلمان و دانش‌آموزان ذکر نشده است، پس قادر به پاسخگویی نیستند. بعضی از این افراد با همین اندیشه، خود تعداد معلمان یا دانش‌آموزان را تعیین کرده و دیگری

**روش تهیه آزمون:** برای تهیه آزمون در مرحله اول، سؤالات موجود در آزمون‌های معتبری همچون TIMSS<sup>۷</sup>، TAKS<sup>۸</sup> و نیز مقالات پژوهشی که در ارتباط با تعمیم جبری بودند، گردآوری شد. سپس به ویرایش و بومی سازی سؤالات با توجه به فرهنگ و موقعیت اجتماعی کشور ایران پرداخته شد. همچنین با توجه به اهداف مورد نظر سؤالاتی نیز توسط مولفان، (پس از مشاوره با برخی از آموزشگران ریاضی) به آن اضافه شد. در پایان برای انجام اصلاحات و بررسی روایی محتوایی و صوری آن، پیش از آزمون انجام گرفت که با بررسی نتایج آن اصلاحات و تغییرات لازم در متن سؤالات انجام گرفت و بعضی از آن‌ها نیز حذف شدند.

سؤالات نهایی این آزمون از چهار بخش تشکیل می‌شوند. بخش اول شامل سؤالاتی است که اشاره مستقیم بر نوشتن قانون به زبان ریاضی دارند. بخش دوم شامل مسائلی است که یافتن مقادیر عددی یا کامل کردن جدولی در ارتباط با سؤال، دانش‌آموزان را در نوشتن قانون راهنمایی می‌کند. بخش سوم شامل سؤالاتی است که در آن دانش‌آموزان باید از الگوهای شکلی و مقادیر عددی در نوشتن قانون بهره گیرند. بخش چهارم در بر دارنده مسائلی است که هم از الگوهای شکلی و هم از جدول، در نوشتن قانون ریاضی باید استفاده شود.

شایان ذکر است که اغلب سؤالات شامل چند قسمت هدفمند می‌باشند. قسمت اول شامل یافتن مقادیر خاص عددی کوچک است که این فرایند دانش‌آموزان را در تشخیص اینکه کدام یک از عوامل مسئله تغییر می‌کنند و کدام یک ثابت باقی می‌مانند، کمک می‌کند. قسمت دوم شامل یافتن مقادیر عددی بزرگ است که کوپر و وارن به این قسمت، عنوان شبه تعمیم داده اند [۶]. آنها بیان می‌کنند همانطور که فوجی از شبه متغیر<sup>۹</sup> برای معرفی و ارائه متغیر بهره می‌گیرد، ما نیز از شبه تعمیم‌ها برای رسیدن به تعمیم بهره می‌گیریم [۱۲]. زاکیس و همکارانش نشان دادند که کاربرد اعداد بزرگ می‌تواند دانش‌آموزان را در نوشتن تعمیم کمک کنند و بیان داشتند که اعداد بزرگ ممکن است پلی برای پر کردن شکاف بین اعداد کوچک واقعی و نماد سازی مجرد جبری باشد [۱۷].

جدول ۲ بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات بخش دو به تفکیک سؤالات

نتیجه نهایی بخش ۲	۸	۴	۲	شماره سؤالات
	%۹۸/۷۵	%۱۰۰	%۷۷/۵	درصد افرادی که مقادیر خاص عددی را بدست آوردند.
	%۹۳/۷۵	%۹۷/۵	-	درصد افرادی که مقادیر بزرگ عددی (شبه تعمیم) را بدست آوردند.
	%۳۸/۷۵	%۴۰/۲۵	%۴۰	درصد افرادی که رابطه ی ریاضی (تعمیم کلی) را نوشتند.

جدول ۳ بررسی پاسخ‌های درست دانش‌آموزان به سؤالات بخش دو به تفکیک سؤالات

نتیجه نهایی بخش ۲	۸	۴	۲	شماره سؤالات
	%۹۶/۲۵	%۹۶/۲۵	%۴۸/۷۵	درصد افرادی که مقادیر خاص عددی را درست به دست آوردند.
	%۸۲/۵	%۸۳/۷۵	-	درصد افرادی که مقادیر بزرگ عددی (شبه تعمیم) را درست به دست آوردند.
	%۸/۷۵	%۲۰	%۳۷/۵	درصد افرادی که رابطه ریاضی (تعمیم کلی) را درست نوشتند.

در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۲، بخش دو ملاحظه گردید که:

**الف)** دانش‌آموزانی به دلیل عدم درک مفهوم متغیر، بیان داشته‌اند که  $N$  می‌تواند هر عددی باشد؛ لذا در پاسخ به سؤال به  $N$  مقادیر دلخواهی داده و جواب نهایی را یک مقدار عددی بدست آورده‌اند. عده‌ای نیز  $N$  را بی‌نهایت دانسته‌اند.

را پیدا کرده‌اند. بطور مثال نوشته‌اند که «اگر تعداد دانش‌آموزان برابر ۶۰۰ باشد پس تعداد معلمان برابر ۱۰۰ است».

ب) عده‌ای از دانش‌آموزان، رابطه را درست تشخیص داده ولی قادر به بازنمایی ریاضی این رابطه به کمک نمادهای علائم ریاضی نبوده‌اند؛ به طور نمونه دانش‌آموزی رابطه را چنین ارائه کرده است:

$$\text{تعداد معلمان} \times 6 = \text{تعداد دانش‌آموزان}$$

و

$$\text{تعداد دانش‌آموزان} = \text{تعداد معلمان}$$

۶

ج) برخی دانش‌آموزان، از حروف مناسب برای نمایش موضوعات استفاده کردند، ولی به دلیل این که متغیر مستقل و متغیر وابسته را اشتباه در نظر گرفته‌اند، رابطه‌ای نادرست نوشته‌اند. به طور مثال دانش‌آموزی، حرف  $X$  را برای نمایش تعداد دانش‌آموزان و حرف  $Y$  را برای نمایش تعداد معلمان به کار برده، اما رابطه را به صورت  $Y=6X$  نوشته است. ۱۰٪ دانش‌آموزان به این روش رابطه‌ای غلط را ارائه کرده‌اند.

د) تعدادی از دانش‌آموزان، با درک روابط بین تعداد معلمان و دانش‌آموزان و تکیه بر دانش مفهومی و دانش رویه‌ای<sup>۱۱</sup> خود، پاسخی درست به سؤال داده‌اند. اغلب کسانی که به این سؤال پاسخ درست داده‌اند، از راهبرد تناسب استفاده کرده‌اند. به طور مثال بیان داشته‌اند که به ازای هر ۶ دانش‌آموز یک معلم هست، برای  $n$  معلم چند دانش‌آموز هست؟

$$6n = \frac{1}{?} \Rightarrow \text{تعداد دانش‌آموزان}$$

### بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات بخش دو

سؤال ۲) فرض کنید مریم، سه برابر حمید پول دارد. ابتدا جدول مقابل را کامل کنید. بعد از کامل کردن جدول به سؤال داده شده پاسخ دهید: فرض کنید ندانیم حمید چقدر پول دارد و مقدار پول او را  $N$  در نظر بگیریم، حال شما می‌توانید بگویید مریم چقدر پول دارد؟

مریم	حمید
۶۰۰	
	۱۲۰
۳۷۵	
	۲۶۰

جدول ۴ بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات بخش سه به تفکیک سؤالات

نتیجه نهایی بخش ۳	۱۱	۱۰	۶	۵	شماره سؤالات
%۹۸	%۹۳/۷۵	-	%۱۰۰	%۱۰۰	درصد افرادی که مقادیر خاص عددی را درست به دست آوردند.
%۷۶/۳۵	%۵۶/۳۵	-	۹۶/۳۵ %	-	درصد افرادی که مقادیر بزرگ عددی (شبه تعمیم) را درست به دست آوردند.
%۳۱/۳۵	%۲۰	%۸۳/۷۵	%۴۰	%۳۳/۷۵	درصد افرادی که رابطه ریاضی (تعمیم م کلی) را درست نوشتند.

جدول ۵ بررسی پاسخ های درست دانش آموزان به سؤالات بخش سه به تفکیک سؤالات

نتیجه نهایی بخش ۳	۱۱	۱۰	۶	۵	شماره سؤالات
%۸۱/۰۴	%۸۶/۳۵	-	%۷۳/۷۵	%۸۳/۱۲	درصد افرادی که مقادیر عددی را درست بدست آوردند.
%۳۵/۶۲	%۱۶/۳۵	-	%۵۵	-	درصد افرادی که مقادیر عددی بزرگ (شبه تعمیم) را درست به دست آوردند.
%۱۰/۴۲	%۱۰	%۵۲/۵	%۱۶/۳۵	%۵	درصد افرادی که رابطه ریاضی (تعمیم کلی) را درست نوشتند.

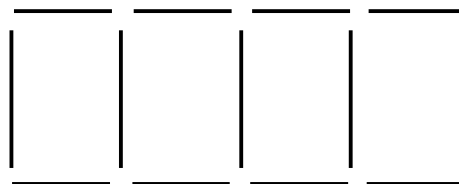
ب) غلبه تفکر حسابی بر تفکر جبری منجر به این شده است که دانش آموزانی در پاسخ به سؤال دو، پاسخ درست  $3N$  را بنویسند؛ ولی آن را به عنوان پول مریم قبول نداشته باشند. بنابراین بیان کرده اند که «اگر ندانیم حمید چقدر پول دارد نمی توانیم بگوییم مریم چقدر پول دارد».

ج) تعدادی از دانش آموزان با استفاده از راهبرد بازگشتی، موفق به کشف قانون شده اند؛ ولی قادر به بیان آن با نمادهای ریاضی نبوده اند. در راهبرد بازگشتی دانش آموزان، به عبارت یا عبارات قبلی برای ساخت عبارات بعدی توجه می کنند. اگر آنان بتوانند مقادیر ثابت و متغیر را در فرایند بازگشتی تشخیص دهند، ممکن است قادر به نوشتن قانون یا عبارت جبری باشند.

آنچه در جداول ۲ و ۳ مشاهده می شود، این است که با وجود آنکه ۸۰٪ دانش آموزان مقادیر عددی خاص را درست به دست آورده اند، ولی فقط ۴۰٪ از آنها قانونی برای روابط عددی بدست آورده اند و تنها ۲۲/۰۸٪ آن را درست نوشته اند. آنها اغلب با تکیه بر روابط بازگشتی، قانونی نوشتند که نادرست بوده است. همچنین بدفهمی از مفهوم متغیر موجب شد که بسیاری از آنان قانونی ننویسند و یا توضیحاتی غلط داشته باشند. در سؤال دو این بخش با توجه به رابطه  $y=ax$  که جدول نمایانگر این رابطه بود - دانش آموزان بیشتری پاسخ درست داده اند.

بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات بخش سه

سؤال ۶) شکل مقابل با تعدادی چوب کبریت ساخته شده است.



الف) برای ساختن ۵ مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟

ب) برای ساختن ۱۰ مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟

ج) برای ساختن  $n$  مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟ اگر می توانید روش خود را توضیح دهید.

به بازنمایی ریاضی قانون به دست آمده نبوده و قانون را به صورت  $1 + 3 \square$  نوشته است.

(د) یکی از دانش آموزان چنین استدلال کرده است که تعداد چوب کبریت‌هایی که به طور افقی در بالا و پایین مربع‌ها قرار می‌گیرند، برابر با  $2n$  است و تعداد چوب کبریت‌هایی که به طور عمودی کنار هم قرار می‌گیرند برابر  $n+1$  است. پس تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در  $n$  مربع  $(n+1)+2n$  است.

(ه) دانش آموزانی، با رویکردی مشابه قسمت «د» تعداد چوب کبریت‌های بالا و پایین را بطور جداگانه حساب کرده‌اند. آن‌ها فرمول را به صورت  $n + n + (n+1)$  نوشته‌اند. این یکی از زیباترین راه حل‌های ارائه شده است که در اصل، مبتنی بر تفکر تجسمی است.

(و) دانش آموزی این گونه استدلال کرده است که «چون چوب کبریت‌ها کنار هم قرار گرفته‌اند بنا براین اگر بخواهیم یک مربع دیگر بسازیم به ۳ چوب کبریت نیاز داریم؛ چون یک ضلع از آن، از مربع کناری فراهم است و هر مربع دارای ۴ ضلع است پس ۴ را در تعداد مربع‌هایی که می‌خواهیم بسازیم ضرب می‌کنیم و از تعداد مربع‌هایی که می‌خواهیم بسازیم یکی کم کرده و از تعداد حاصل کم می‌کنیم. او قانون را به صورت  $4n - (n-1)$  نوشته است.

(ز) دانش آموزی از اینکه در اولین مربع از ۴ چوب کبریت، ولی برای ساختن مابقی از ۳ چوب کبریت استفاده می‌شود، نتیجه گرفته است که می‌توان برای ساختن  $n$  مربع از رابطه  $4 + 3(n-1)$  استفاده کرد.

(ح) دانش آموزی با استفاده از روابط عددی بین تعداد مربعات و تعداد چوب کبریت‌ها، دریافته است که تعداد چوب کبریت‌های هر شکل برابر با تعداد مربعات به علاوه عددی فرد است. او تعداد مربعات را با  $n$  نمایش داده و اعداد فرد را نیز با توجه به  $n+3$  به صورت  $n+n+1$  در نظر گرفته است. در نهایت او قانون را به صورت  $n+(n+n+1)$  نوشته است (شکل ۱).

(ط) یکی از دانش آموزان با تکیه بر روابط عددی، دریافته است که تعداد مربعات با یک عدد فرد جمع شده است تا تعداد چوب کبریت‌های مورد نیاز حاصل شود (جدول ۶).

پاسخ‌های دانش آموزان در جدول‌های ۴ و ۵ خلاصه شده‌اند. در بخش سه، در سؤال ده الگویی شکلی همراه با عبارت-هایی جبری که نمایانگر تعمیمی از الگوها بود به دانش-آموزان ارائه شده بود تا از بین آن‌ها تعمیم درست انتخاب شود.  $83/75\%$  دانش آموزان به سؤال ده پاسخ دادند. از این تعداد  $52/5\%$  گزینه درست را انتخاب کرده‌اند که مشخص شد اغلب آنها با استفاده از جایگزینی اعداد در گزینه‌ها و آزمایش آنها، گزینه درست را به دست آورده‌اند. عده‌ای هم با استفاده از راهبرد بازگشتی و حدس گزینه درست را انتخاب کرده‌اند. بررسی نادرستی برخی از گزاره‌های داده شده در کلاس درس نیز می‌تواند به درک بهتر تعمیم کمک نماید.

از بررسی پاسخ‌های دانش آموزان به سؤال ۶، بخش ۳ نتایج زیر به دست آمد:

(الف) بسیاری از دانش آموزان با تکیه به روابط بازگشتی به حل مسئله پرداخته‌اند. آنان متوجه شده‌اند که به ازای هر مربع جدید، نیاز به ۳ چوب کبریت است؛ لذا بعضی با حدس و آزمایش به فرمول رسیده‌اند و عده‌ای نیز با راهبرد روش خطی به فرمول درست دست یافته‌اند. منظور از راهبرد روش خطی به کار بردن الگویی مانند  $M(n) = an + b$  (ب=۰) است که هر دو عملیات جمع و ضرب رابه ترتیب موضوعات شامل می‌شود. بدین معنی که آنان متوجه شده‌اند که برای هر مربع جدید، نیاز به ۳ چوب کبریت می‌باشد. با توجه به اینکه تعداد چوب کبریت‌های مربع اول (یعنی ۴) را می‌توان به صورت  $3+1$  نوشت، آنان مقدار ثابت یک را پیدا کرده و دستور  $3n+1$  را بدست آورده‌اند. بعضی از آنان با مثال‌هایی عددی فرمول خود را آزمایش کرده‌اند تا به درستی آن اطمینان پیدا کنند.

(ب) بعضی از دانش آموزان، با توجه به روابط بازگشتی و این مطلب که، به ازای هر مربع جدید، ۳ چوب کبریت مورد نیاز است، فرمول  $n+3$  را نوشته‌اند که  $n$  تعداد چوب کبریت‌های شکل قبلی است.

(ج) دانش آموزی با استفاده از راهبردهای رسم شکل و بازگشتی دریافته است که تعداد چوب کبریت‌ها در هر مرحله، سه تا از مرحله قبلی بیشتر است. او تعمیم را درست یافته، و گرچه مفهوم متغیر را درک کرده؛ ولی قادر

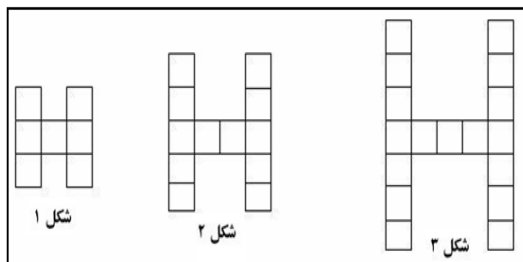
نکته مهم در تحقیق حاضر این است که بیشتر راه حل‌های درست در برخی از مسائل (به طور مثال سؤال ۶) با استفاده از تجسم بوده است (جدول ۷). علاوه بر این تلفیق راهبردها و استفاده از بیش از یک راهبرد توسط دانش آموزان قابل توجه است.

جدول ۷ دانش آموزان موفق از روش‌های متفاوتی تعمیم را بدست آورده اند (سؤال ۶).

ع. س.	ایده راه حل	روند ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ...	عبارات هم ارزش شکل م n	عبارت جبری
۱	روابط عددی	۱+۳, ۱+۳, ۳, ۱+۳, ۳, ۱+۴, ۳, ...	۱+۳.n	۳n+۱
۲	تفکر تجسمی	۱+۳, ۱+۳, ۳, ۱+۳, ۳, ۱+۴, ۳, ...	۱+۳.n	۳n+۱
۳	تفکر تجسمی	۴, ۲, ۴-۱, ۳, ۴-۲, ۴, ۴-۳, ...	۴n-(n-1)	۳n+۱
۴	تفکر تجسمی	۱ ۲ ۳ ۱ ۲ ۳ ۲ ۳ ۴ و ...	n+n+(n+1)	۳n+۱
۵	تفکر تجسمی	(۱+۱).۲, (۲+۱).۲+۱ (۳+۱).۲+۲ (۴+۱).۲+۳, ...	۲(n+۱)+n-۱	۳n+۱
۶	روابط عددی	۴=۱+۳, ۷=۲+۵, ۱۰=۳+۷, ۱۳=۴+۹,	n+(۲n+۱)	۳n+۱
۷	تفکر تجسمی	۴, ۴+۱, ۳, ۴+۲, ۳, ۴+۳, ۳, ۴+۳, ۳, ...	۴+۳(n-1)	۳n+۱
۸	روابط عددی	(۱+۱+۱)+۱, (۲+۲+۱)+۱, (۳+۳+۱)+۱, ...	(n+n+۱)+۱	۳n+۱

**بررسی پاسخ‌های دانش آموزان سؤالات بخش چهار سؤال**

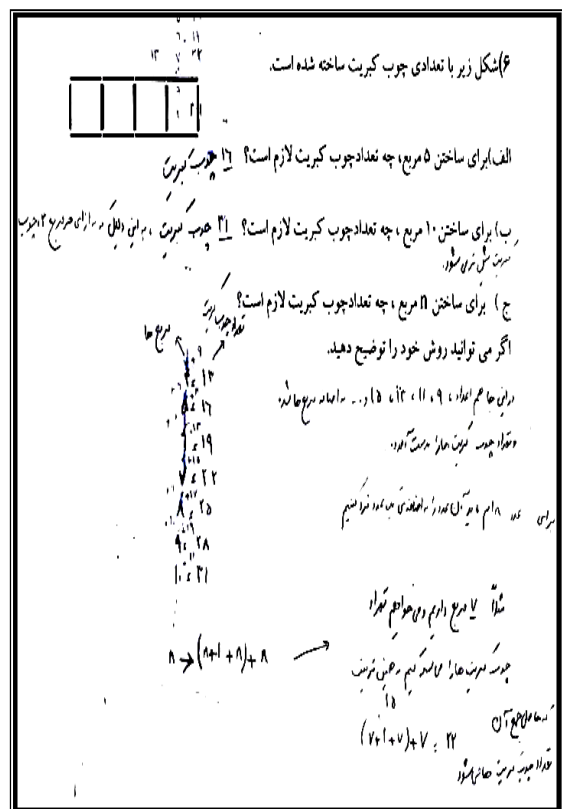
(۷) شکل‌های زیر از تعدادی مربع تشکیل شده اند:



این دانش آموز فرمول  $n + (2n + 1)$  را به صورت نوشته است.

جدول ۶ تعداد چوب کبریت‌ها برابر با تعداد مربعات بعلاوه عددی فرد است.

تعداد مربعات	تعداد چوب کبریت‌های لازم
۴	۹+۴=۱۳
۵	۱۱+۵=۱۶
۶	۱۳+۶=۱۹
۷	۱۵+۷=۲۲
۸	۱۷+۸=۲۵
۹	۱۹+۹=۲۸



شکل ۱ دانش آموز با استفاده از روابط عددی بین موضوعات به قانون دست یافته است.

مطالعه حاضر نشان دانش‌آموزان نظم موجود در الگوها را به شیوه‌های مختلف مشاهده و با استدلال‌های متفاوتی بیان می‌کنند. پژوهش درباره الگویابی و تعمیم لاقط در دهه گذشته به شکل تجربی این دیدگاه قابل توجه است که افراد مایلند که یک الگوی یکسان P را به طور متفاوتی ببینند و پردازش کنند. در نتیجه این بدان معناست که آن‌ها تعمیم‌های متفاوتی را برای P ارائه می‌دهند [۱۹].



جدول ۸ بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات بخش چهار به تفکیک سؤالات

جدول ۹ بررسی پاسخ های درست دانش آموزان به سؤالات بخش چهار به تفکیک سؤالات

شماره سؤالات	۳	۷	۹	۱۲	نتیجه نهایی بخش ۴
درصد افرادی که مقادیر عددی خاص را درست به دست آوردند.	-	-	-	٪۶۳.۷۵	٪۶۳.۷۵
درصد افرادی که جدول را درست کامل کردند.	٪۷۱.۲۵	٪۸۵	٪۴۸.۷۵	٪۵۲.۵	٪۶۴.۳۷
درصد افرادی که جدول را درست کامل کردند.	٪۷۱.۲۵	٪۸۵	٪۴۸.۷۵	٪۵۲.۵	٪۶۴.۳۷
درصد افرادی که مقادیر عددی بزرگ را درست به دست آوردند.	٪۶۸.۷۵	٪۱۲.۵	-	٪۲۱.۳۵	٪۵۴.۶
درصد افرادی که رابطه ریاضی (تعمیم کلی) را درست نوشتند	٪۳۶.۲۵	٪۸.۷۵	٪۲.۵	٪۴.۵۹	٪۱۳.۰۲

در بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤال ۷ بخش ۴ یافته های زیر به دست آمد:

**الف)** اکثریت دانش آموزان باتکیه به روابط بازگشتی به حل مسأله پرداخته اند. آنان دریافته اند که هر دو شکل متوالی ۵ مربع با هم اختلاف دارند. دانش آموزان با توجه به عبارت یا عبارات قبلی، برای ساخت عبارات بعدی عمل کرده اند. از این رو بعضی از آنها، برای پیدا کردن تعداد مربعات هر شکل قانون را  $n+5$  نوشته و  $n$  را تعداد مربعات شکل قبلی در نظر گرفته اند.

الف) جدول مقابل را کامل کنید؟

ب) آیا رابطه ای بین هر شکل و شکل بعدی می بینید؟

ج) اگر بخواهید تعداد مربعات در شکل صدم را به دست

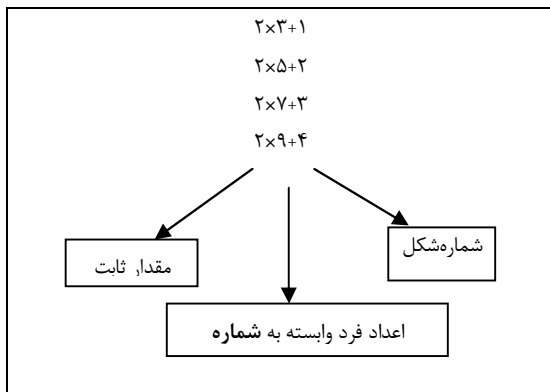
آورید، چه می کنید؟

د) تعداد مربعات در شکل  $n$ ام را بنویسید. دلیل پاسخ خود را بنویسید.

تعداد مربعات	شماره شکل
۷	۱
۱۲	۲
۱۷	۳
۴	۴

شماره سؤالات	۳	۷	۹	۱۲	نتیجه نهایی بخش ۴
درصد افرادی که مقادیر عددی خاص را درست آوردند.	-	-	-	٪۸۴.۳۷۵	٪۸۴.۳۷
درصد افرادی که جدول را درست کامل کردند.	٪۲۶.۲۵	٪۱۲.۵	٪۴۲.۵	٪۲۷.۵	٪۲۷.۱۹
درصد افرادی که جدول را درست کامل نکردند.	٪۲.۵	٪۲.۵	٪۸.۷۵	٪۲۰	٪۸.۴۴
درصد افرادی که مقادیر عددی بزرگ را درست آوردند.	٪۸۸.۷۵	٪۳۱.۲۵	-	٪۶۳.۷۵	٪۶۱.۲۵
درصد افرادی که رابطه ریاضی (تعمیم کلی) را نوشتند.	٪۳۷.۵	٪۲۵	٪۲۵	٪۳۱.۲۵	٪۲۹.۶۹

کار بردن مقدار ثابت تغییر مانند عامل ضرب، سپس با در نظر گرفتن آن با جمع یا تفریق ثابت، برای رسیدن به یک



مقدار خاص وابسته به متغیر تنظیم می‌شود. بدین ترتیب او قانون را به صورت  $n + (2n+1) \times 2$  نوشته است (شکل ۳ و شکل ۴).

شکل ۳ راهبرد تنظیم روش

شکل ۴ دانش آموز با به‌کارگیری راهبرد تنظیم روش به تعمیم درست دست یافته است.

دانش آموزی با تکیه بر روابط عددی در جدول قانون را به شکل  $(n-2) \times 6n$  به دست آورده است. این دانش‌آموز تعداد مربعات به کار رفته در شماره شکل‌های ابتدایی را به صورت ترکیبی خطی از مضرب‌های ۶ تنظیم کرده است. سپس مقادیر ثابت و متغیر را از روی آنها تشخیص داده و

عده‌ای با توجه به اینکه هر شکل، ۵ مربع نسبت به مربع قبلی خود بیشر است، اینگونه استدلال کرده‌اند که تعداد مربعات مضربی از ۵ باید باشند و قانون را  $5n$  نوشته‌اند.

دانش‌آموزی با روش غلط تناسب متمایل به پیدا کردن تعداد مربعات در شکل صدم بوده است. او تعداد مربعات در شکل چهارم را ۲۲ به دست آورده است و با استفاده از تناسب تعداد مربعات در شکل صدم را ۵۵۰۰ تعیین کرده است. در پاسخ به تعداد مربعات شکل  $n$  ام نیز بیان داشته است که « $n$  می‌تواند هر عددی باشد، پس به تعداد مربعات صدم باز هم ۵ تا اضافه می‌کنیم تا آخر» (شکل ۲).

دانش‌آموزانی با توجه به اینکه اختلاف هر دو شکل متوالی ۵ مربع است، برای شکل  $n$  ام بیان داشته‌اند که ابتدا فاصله بین شکل  $n$  ام تا شکل اول را پیدا کرده و سپس حاصل را در ۵ ضرب کرده که تعداد مربعات افزوده شده تا شکل  $n$  ام بدست آید و در نهایت تعداد مربعات شکل اول را به آن می‌افزاییم. آنان قانون را به صورت  $5(n-1) + 7$  نوشته‌اند.

بعضی از دانش‌آموزان، با توجه به اینکه برای پیدا کردن تعداد مربعات هر شکل، می‌توان به تعداد مربعات شکل قبلی ۵ مربع اضافه کرد، متوجه شده‌اند ترکیبی خطی با مضرب ۵ دارند و با توجه به مقادیر جدول مطرح شده در سؤال، قانون را به صورت  $5n + 2$  نوشته‌اند.

شکل ۲ دانش آموز به اشتباه از راهبرد تناسب استفاده کرده است.

دانش‌آموزی با توجه به راهبرد بازگشتی و تنظیم روش<sup>۱۲</sup> قانون را پیدا کرده است. راهبرد تنظیم روش با به

مقادیر متغیر را با شماره شکل مرتبط کرده و قانون را به -

شماره شکل	تعداد چوب
۱	$6 \times 1 + 1 = 6 \times 1 - (1 - 2) = 7$
۲	$6 \times 2 + 0 = 6 \times 2 - (2 - 2) = 12$
۳	$6 \times 3 - 1 = 6 \times 3 - (3 - 2) = 17$
۴	$6 \times 4 - 2 = 6 \times 4 - (4 - 2) = 22$

دست آورده است (جدول ۱۰).

جدول ۱۰ دانش آموز با تکیه بر روابط عددی قانون را نوشته است.

ح) دانش آموزی به دلیل اینکه بعد از شکل اول به شکل - های بعدی ۵ مربع اضافه شده است و شکل اول دارای ۷ مربع است، قانون را به غلط به صورت  $5n+7$  نوشته است. او می خواسته طبق روش خطی عمل کند؛ اما برای مرحله اول اشتباه کرده و قانون را غلط ارائه کرده است. ط) برخی دانش آموزان توانسته اند با استدلال، تعداد مربعات شکل صدم را به دست آورند؛ ولی قادر به نوشتن فرمولی نبودند. به طور مثال دانش آموزی اینگونه استدلال می کند که « ما می دانیم شکل سوم ۱۷ مربع دارد، پس ابتدا صد را منهای سه کرده و حاصل آن را در تعداد واحدهایی که در هر شکل اضافه شده ضرب می کنیم و جواب آن را با تعداد مربعات شکل سوم جمع می کنیم تا تعداد مربعات شکل صدم را بدست آوریم.»

$$100 - 3 = 97 \quad 97 \times 5 = 485 \quad 485 + 17 = 502$$

دانش آموز از تفکر حسابی خود برای رسیدن به تعداد مربعات شکل صدم استفاده کرده؛ اما او نتوانسته است از آن برای رسیدن به یک دیدگاه جبری استفاده کند. در واقع او قادر به ایجاد پلی بین تفکر حسابی و جبری نبوده است. ی) عده ای از دانش آموزان با توجه به شکل اظهار داشته اند که «رابطه در شکل به گونه ای است که به مربع های ستونی دو طرف، دو مربع افزوده می شود که در مجموع ۴ مربع به ستون ها و یک مربع نیز به وسط اضافه می شود که در کل، هر مرحله ۵ مربع افزوده می شود». اما اغلب آنان قانون را  $n+5$  نوشته یا اصلاً قانونی ننوشته اند.

ک) برخی دانش آموزان با رسم شکل های بعدی به تکمیل جدول پرداخته اند. عده ای نیز  $n$  را بی نهایت دانسته اند، یا برای به دست آوردن تعداد مربعات در شکل  $n$  ام به  $n$

مقداری خاص داده اند. دانش آموزانی بودند که قوانینی نادرست که ناشی از عدم درک مفهوم متغیر و ناتوانی در مجردسازی می باشد، ارائه کرده اند. در هر صورت با وجود آنکه ۸۵٪ از دانش آموزان جدول را کامل کرده اند، ولی تنها ۲۵٪ از آنان فرمولی نوشته اند. در مجموع تنها ۸/۷۵٪ از دانش آموزان قانونی درست برای تعمیم ارائه کرده اند.

### پاسخ به پرسش های تحقیق

#### سؤال اول تحقیق: چه عواملی موجب شکست یا موفقیت دانش آموزان در تعمیم می شود؟

نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل آزمون تعمیم این مطالعه، نشان می دهد که عوامل زیر موجب عدم موفقیت دانش آموزان در تعمیم جبری است:

#### - عدم درک مفهوم متغیر

اهمیت درک مفهوم متغیر در جبر، انکار ناپذیر است؛ اما درک مفهوم متغیر مستلزم زمان است و به صورت آنی حاصل نمی شود. در حقیقت یک پایه خاص تحصیلی در مدرسه به تنهایی قادر نیست که این بار را به دوش کشد. آموزش این مفهوم باید در تمام سطوح تحصیلی به صورت متوازن و هدفمند مد نظر برنامه ریزان درسی باشد. این یافته با پژوهش فوجی [۱۲] سازگار است. موارد زیر نمایانگر بد فهمی دانش آموزان از مفهوم متغیر در این تحقیق است:

الف: بعضی از دانش آموزان  $n$  را یک عدد خاص می دانستند، به این معنی که برای به دست آوردن مرحله  $n$  ام هر سؤال، به  $n$  عدد معینی نسبت داده و پاسخ را می نوشتند. برخی هم با استدلال این که نمی دانند  $n$  چه عددی است، اظهار داشتند که نمی توانند پاسخگوی مرحله  $n$  ام باشند.

ب: تعدادی از دانش آموزان  $n$  را یک عدد بسیار بزرگ می دانستند و برخی از آنها  $n$  را بی نهایت در نظر گرفتند و در نتیجه عبارت مورد نظر مرحله  $n$  ام هر سؤال را نیز بی نهایت بدست آوردند.

ج: دانش آموزان در تشخیص متغیر مستقل و وابسته ناتوان بودند و در نتیجه با وجود روابط درستی که درک کردند، قانونی غلط ارائه کردند.

#### - تکیه بر روابط عددی بیش از روابط بنیادی دیگر

الف: در بررسی پاسخ های دانش آموزان مشاهده شد که آنها

فقدان پایه‌ای قوی از حساب، موجب شد تا برخی دانش-آموزان با وجود بیان رابطه درست، قانونی غلط بنویسند. دانش‌آموزانی برای پاسخگویی به بعضی از سؤالات، به اشتباه از راهبرد تناسب استفاده کردند که این می‌تواند بدین دلیل باشد که دانش‌آموزان سعی کرده‌اند به کمک روش‌هایی که قبلاً دیده‌اند، راه حلی بیابند. آنان با دیدن چنین مسائلی، اولین چیزی که به ذهن شان می‌رسد، راهبرد تناسب است؛ بدون آنکه به راهبردهای دیگر فکر کنند. این امر می‌تواند ناشی از تکیه بیش از اندازه بر دانش رویه‌ای در کلاس‌های درس و نیز عدم آموزش راهبردهای دیگر مربوط به تعمیم باشد.

#### – ناتوانی در بازنمایی مفاهیم و اعمال ریاضی

از آنجا که بسیاری از دانش‌آموزان قادر به تشخیص قانون بودند؛ ولی قادر به بیان رابطه نبودند، این موضوع، این ایده را حمایت می‌کند که «فهم تعمیم و بیان تعمیم با یکدیگر متفاوتند». در حقیقت مشکل دانش‌آموزان در بازنمایی و نه تشخیص رابطه است. آنان زبان و ابزار برای بیان رابطه و تعمیم نداشتند. البته کار با علائم و نمادهای ریاضی بدون ایجاد زمینه‌ای مناسب برای مرتبط کردن آن‌ها با مفاهیم ریاضی فایده چندانی به همراه نخواهد داشت. در بررسی و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزانی که تعمیم‌های درست ارائه کردند ملاحظه شد که سه دسته از دانش-آموزان در تعمیم موفق بودند.

۱- آنهایی که دارای دانش مفهومی و دانش رویه‌ای مناسبی بودند و با بهره‌گیری از دانش مفهومی خود برای یک مسأله، رویه‌ای برای حل آن ساختند. این دانش‌آموزان با درک درست الگو و رابطه بین موضوعات و به‌کار بردن راهبرد مناسب، به هدف زدند و از آن طریق به تعمیم درست دست یافتند.

۲- دانش‌آموزانی که در درک الگوهای موضوعات و کاربرد راهبردها، دارای انعطاف بودند و توانستند هنگامی که راهبردی بی‌نتیجه بود، راهبرد دیگری به‌کار برند. هم‌چنان‌که انگلیش و وارن [۲۰] نیز به اهمیت تفکر انعطاف-پذیر اشاره می‌کنند.

۳- کسانی که روش تفکر خود را به صورت شمرده و مفصل بیان کرده‌اند. در حقیقت آنانی که همیشه به دنبال توجیه و توضیح عمل خود هستند، امکان بیشتری وجود دارد که در

برای پیدا کردن رابطه و تعمیم، از روابط عددی بین موضوعات و به‌ویژه روابط بازگشتی استفاده می‌کنند. این امر موجب می‌شود که آنان دو دسته قانون بنویسند؛ قانون-های درست که براساس روابط تابعی ( $y=f(x)$ ) بین موضوعات است، و لنین اصطلاح قانون صریح برای آنها به-کار برده و قانون‌های غلط که بر اساس رابطه بازگشتی بین موضوعات است باید به صورت  $a_{n+1}=a_n+d$  (که  $a_n$  و  $a_{n+1}$  مقادیر متوالی موضوعات هستند و  $d$  ضریب افزایشی است) نوشته شود. ولی در این آزمون بسیاری از دانش‌آموزان با نمایش غلط، آن را به صورت  $n+d$  نوشتند. لنین برای این گونه قوانین اصطلاح قانون بازگشتی را به‌کار برده است. در حقیقت دانش‌آموزانی که با استفاده از این راهبرد، تعمیمی درست ارائه کردند، بر اساس کشف مقادیر ثابت و متغیر در فرآیند بازگشتی به این درک رسیده‌اند ولی اغلب آنان، بنابر دانستن جواب قسمت قبلی، پاسخ مرحله بعدی را بیان کردند. از این رو بعضی از آنها در قبال پاسخ به مرحله  $n$  ام، آن را  $n+d$  نوشته‌اند که  $n$  تعداد موضوع مورد نظر در مرحله قبلی و  $d$  ضریب افزایشی است. عده‌ای هم، چون در نوشتن قانون، متکی به عدد قبلی هستند، نتوانستند قانون یا فرمولی درست بنویسند.

ب: به نظر می‌رسد که دانش‌آموزان در درک نظم و ترتیب و رابطه بین زوج‌های عددی، درسؤالاتی که همراه با ارائه جدول بوده‌اند، موفق‌تر عمل کردند و تعداد بیشتری متمایل به نوشتن قانون بودند. دانش‌آموزان، برای تعیین قوانین الگوها از افزایش الگوها با توجه به جدول‌های عددی و شمارش ساختارهای شهودی استفاده کردند. این با یافته-های کوپر و وارن و انگلیش و وارن سازگار است [۶ و ۲۰] که اظهار می‌دارند، بیان تعمیم از روی الگوهایی که در جداول عددی است برای یاددهی آسان‌تر هستند. در حقیقت دانش‌آموزان روابط بین موضوعات مختلف را در تکرار الگوها و با تکرارهای بیشتر تعمیم می‌دهند. در این فعالیت‌ها دیده شد که دانش‌آموزان الگوها را شکستند و تعداد موضوعات را  $n, n+1, n+2, \dots$  قرار دادند و اجزای تکراری در جدول را از میان ستون‌ها (کشف مقادیر ثابت و متغیر) تعمیم دادند.

#### – عدم آشنایی کافی با راهبردهای تعمیم

جدول ۱۱ راهبردهایی که دانش آموزان برای هریک از سؤالات به کار برده‌اند

سؤالات راهبردها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
حدس و آزمایش	-	-	-	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	✓	-
شمارش	-	-	-	-	✓	✓	✓	-	✓	-	✓	✓
جایگزینی	-	-	-	-	-	-	-	-	-	✓	-	-
تناسب	✓	-	-	-	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓
موضوع کلی	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	✓	-
تفاضل عددی	-	-	✓	-	✓	-	-	-	✓	-	✓	-
بازگشتی	-	-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
تنظیم روش	-	-	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	-	✓	✓
خطی	-	-	-	-	-	✓	✓	-	-	-	✓	-
زمینه ای	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-	✓	✓
مجموع راهبردهای مورد استفاده	۲	۱	۴	۲	۶	۷	۸	۲	۵	۳	۹	۵

ارائه تعمیم، موفق باشند. این موضوع با یافته‌های لنین [۱۵] و انگلیش و وارن [۲۰] سازگار است. این یافته تأکید می‌کند که دانش‌آموزان در کلاس درس تشویق شوند که در مورد راه حل خود با دیگر دانش‌آموزان و معلم کلاس گفتگو کنند و اعمال خود را ضمن حل مسأله توضیح دهند.

**سؤال دوم تحقیق: دانش‌آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری از چه راهبردهایی استفاده می‌کنند؟**

راهبردهایی که دانش‌آموزان در این تحقیق مورد استفاده قرار دادند، همراه با راهبردهای مورد استفاده برای هر سؤال در جدول ۱۱ ارائه شده است. آنان برای پاسخگویی به قسمت‌های مختلف هر سؤال، به ندرت از رسم شکل استفاده کردند و بیشتر متمایل به استفاده از راهبردهای عددی بودند. با این حال دانش‌آموزانی که در تعمیم موفق بودند هنگامی که با یک شکل یا الگوی شکلی مواجه می‌شدند، به کمک تجسم و هر یک با روش خود به حل مسأله می‌پرداختند. شواهد تجربی محکم نشان می‌دهند که بین مهارت‌های ادراکی تجسمی و توانایی ریاضی<sup>۱۳</sup> و بین درک تجسمی و دستیابی ریاضی و بین بازنمایی تجسمی (یعنی

استفاده از تصاویر یا نمودارها) و موفقیت در حل مسأله ریاضی روابط معناداری وجود دارند [۲۱]. برخی از دانش‌آموزان برای پاسخگویی به بعضی سؤالات، بیش از یک راهبرد به کار بردند. به طور مثال دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات آزمون، در یک مسأله از راهبردهای رسم شکل و بازگشتی، راهبردهای حدس و آزمایش و بازگشتی، راهبرد-های بازگشتی و تنظیم روش، راهبردهای بازگشتی و تناسب و راهبردهای بازگشتی و زمینه ای استفاده کردند. این دانش‌آموزان توانایی به کارگیری همزمان چند راهبرد را برای رسیدن به تعمیم دارند که می‌تواند نمایانگر تفکر انعطاف‌پذیر آنان باشد. دانش‌آموزان در ده مسأله از دوازده سؤال داده شده، از راهبرد بازگشتی برای پاسخگویی به سؤالات استفاده کردند.

تمامی راهبردهای ذکر شده (به جز یک راهبرد) به صورت درست یا نادرست مورد استفاده قرار گرفته است. طرح مسأله هایی این چنین در کلاس درس و بررسی راه حل ها می تواند بازده آموزشی مناسبی به همراه داشته باشد. این تحقیق نشان داد که با وجود غفلت از تجسم و تفکر تجسمی در برنامه درسی ریاضی و کتاب های درسی ریاضی مدرسه ای، بخش زیادی از دانش آموزان از این توانایی بهره گرفته اند و راه حل هایی بدیع برای تعمیم ارائه کرده اند. به طور مثال در سؤال ۳ دیدن و بیان اشتراکات مبتنی بر تجسم و به روش های متفاوت منجر به نوشتن قانون با نمایش های مختلف هم ارز مانند:  $2n+(n+1)$  و  $3n+1$  و  $n+(n+n+1)$  و  $n+(n+n+1)$  و  $n+(n+n+1)$  و  $n+(n+n+1)$  و  $n+(n+n+1)$  (۱) شده است. این نکته نمایانگر این است که این گونه سؤالات دانش آموزان را بیشتر به فرایند تعمیم و توجیه ترغیب می کند. فهم تعمیم، بیان و بازنمایی آن به صورت یک عبارت جبری، باید به صورت هماهنگ مورد توجه قرار گیرند. بسیاری از دانش آموزان با توجه به دانش و تفکر حسابی، به پاسخ مراحل اولیه سؤال پرداخته و سپس با توجه به آن پاسخ ها و گذر از حساب به جبر، موفق به نوشتن قانون شدند. پس می توان با مطرح کردن مسائل تعمیم در کلاس های درس، فرصتی فراهم کرد که انتقال تفکر حسابی به جبری صورت گیرد. موضوع مهم دیگر لزوم برقراری توازن بین دانش مفهومی و دانش رویه ای در برنامه درسی ریاضی است. تعمیم در مجموع از جایگاه مناسبی برخوردار نیست. با آن که انتظار می رفت دانش آموزان در مرحل تفکر جبری باشند ولی نتایج تحقیق نشان داد که آنان هنوز از تفکر حسابی گذر نکرده اند.

#### پی نوشت

<sup>۱</sup>Arithmetic with Letters

<sup>۲</sup>National Council of Teachers of Mathematics

<sup>۳</sup>Quasi-Generalization

<sup>۴</sup>Generational, Transformational, and Global/meta-level

<sup>۵</sup>Rule

<sup>۶</sup>Guess and Check

<sup>۷</sup>Trends In International Mathematics and Science Study

به نظر می رسد این راهبرد ارزش مطالعه بیشتری را داشته باشد. همچنین برای حل مسأله یازده، ۹ راهبرد مختلف به کار گرفته شد. اگرچه برخی از این راهبردها به صورت نادرست مورد استفاده قرار گرفت، با این حال بررسی آن ها در کلاس های درس، دانش آموزان را برای استفاده درست از راهبردها یاری خواهد کرد.

#### ۴- نتیجه گیری

این تحقیق نشان داد که دانش آموزان در تعمیم هایی به صورت  $y=ax$ ، عملکرد بهتری از تعمیم های خطی به فرم  $y=ax+b$  دارند. این امر می تواند ناشی از آشنایی مناسب با مفهوم تناسب باشد که در دوره های ابتدایی و راهنمایی به قدر کافی آموزش داده می شوند. از طرف دیگر در مورد تعمیم هایی به شکل  $y=ax+b$  مواد آموزشی مناسب و کافی نبوده اند. با آنکه الگو های شکلی و شبه تعمیم ها، می توانند درک قوی از ساختارها و مفاهیم ریاضی همچون متغیر در دانش آموزان ابتدایی و راهنمایی ایجاد کنند، کتاب های درسی کشورمان چندان به آن ها نمی پردازند. در برنامه درسی بسیاری از کشورها سه تایی «الگوها، روابط و توابع» از دوره مقدماتی تا سال های آخر متوسطه جایگاهی مناسب و ثابت دارد. پژوهش حاضر نشان داد که لازم است در معرفی مفهوم متغیر، تجدید نظر و بازنگری صورت گیرد. بخشی از این بازنگری به استفاده از الگوها در سطوح مختلف تحصیلی باز می گردد. دانش آموزان در مراحل اول و دوم تعمیم (دیدن، بیان کردن) دارای توفیق نسبی بودند؛ ولی در مرحله سوم (نوشتن تعمیم) دچار مشکل بودند. در حقیقت دانش آموزان از طریق توجه به مشترکات حالات خاص موضوعات به فهم و درک تعمیم نایل می شدند و قادر به بیان آن به صورت کلامی بودند؛ ولی در بیان تعمیم به صورت نمادین موفق نبودند. این موضوع نشانگر آن است که در کلاس های درس استاندارد، بازنمایی به قدر کافی مورد توجه قرار نگرفته است. اگر چه بسیاری از دانش آموزان در تعمیم دادن عملکرد چندان مناسبی نداشتند؛ اما تنوع راهبردهای به کار گرفته شده از سوی دانش آموزان موفق این ایده را حمایت می نماید که می توان آن ها را در کلاس آموزش داد. برای یکی از مسائل

- [۱۱] Radford L., *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*, Proceedings of the ۲۸th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Vol.۱, ۲۰۰۶, pp.۲-۲۱.
- [۱۲] Fujii T., *Probing students understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand?*, Proceedings of the ۲۰۰۳ Joint Meeting of PME and PMENA, Vol.۱, ۲۰۰۳, pp.۴۹-۶۵.
- [۱۳] Becker J.R. and Rivera F., *Generalization strategies of beginning high school algebra students*, in: Chick H. and Vincent J.L., (Eds.), Proceedings of the ۲۹th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.۴, ۲۰۰۵, pp.۱۲۱-۱۲۸.
- [۱۴] Kieran C., *Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching*, in: Cai J., Knuth E., (Eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ۲۰۱۱.
- [۱۵] Lanin J.K., *Generalization and Justification the challenge of introducing Algebraic reasoning through patterning activities*, Mathematical Thinking and learning ,Vol.۷, ۲۰۰۵, pp.۲۳۱-۲۵۸.
- [۱۶] Radford L., *Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization*, Mathematical Thinking and Learning, Vol.۵, No.۱, ۲۰۰۳, pp.۳۷-۷۰.
- [۱۷] Zazkis R., Liljedahl P., and Chernoff E., *The Role of Examples in Forming and Refuting Generalizations*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol.۴۰, No.۱, ۲۰۰۸, pp.۱۳۱-۱۴۱.
- [۱۸] Rivera F.D., *Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization*, Mathematics Teacher, Vol.۱۰۱, No.۱, ۲۰۰۷, pp.۶۹-۷۵.
- <sup>۱</sup>Texas Assessment of Knowledge and Skill
- <sup>۲</sup>quasi variable
- <sup>۳</sup>بخش یک شامل سؤال ۱، بخش دو شامل سؤالات ۲،۴ و ۸، بخش سه شامل سؤالات ۵،۶ و ۱۰ و ۱۱، بخش چهار شامل سؤالات ۳،۷،۹ و ۱۲ است.
- <sup>۴</sup>Conceptual knowledge and Procedural Knowledge
- <sup>۵</sup>Rate-Adjust
- <sup>۶</sup>Visual Perceptual Skills and Mathematical Ability
- ### مراجع
- [۱] Mason J., *Early Algebraization*, in Cai J. and Knuth E., (Eds.), Advances in Mathematics Education, Netherlands: Springer, Vol.۲, ۲۰۱۱.
- [۲] Usiskin Z., *Doing algebra in grades K-۴*, Teaching children Mathematics, Vol.۳, ۱۹۹۷, pp.۳۴۶- ۳۵۶.
- [۳] Kleiner I., *A History of Abstract Algebra*, Birkhauser Boston, ۲۰۰۷.
- [۴] Kieran C., *the Core of Algebra: Reflections on its Main Activities*, in Stacey K. Chick H. Kenda M., (Eds.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra, The ۱۳<sup>th</sup> ICMI Study, Vol.۸, ۲۰۰۴.
- [۵] National Council of Teachers of Mathematics, *Principals and standards for school mathematics*, Reston, ۲۰۰۰.
- [۶] Cooper J.T. and Warren E., *The effect of different representations on Years ۳ to ۵ student's ability to generalization*, ZDM mathematics Education, Vol.۴۰, ۲۰۰۸, pp.۲۳-۲۷.
- [۷] Polya G., *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, in: Aram A., (Ed.), Tehran, Keyhan, ۲۰۰۱.
- [۸] Amit M. and Neria D., *Rising to the challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students*, ZDM, Vol.۴۰, No.۱, ۲۰۰۸, pp.۱۱۱-۱۲۹.
- [۹] Mason J., *Expressing Generality and Roots of Algebra*, in: Bednarz N., Kieran C. and Lee L.,(Eds.), Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching, Kluwer, Dordrecht, ۱۹۹۶, pp.۶۵-۸۶.
- [۱۰] Kaput J.J., *Teaching and learning a new algebra*, in: Fennema E. and Romberg T., (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers, ۱۹۹۹, pp.۱۳۳-۱۵۵.

- [۱۹] Rivera F. and Becker J., *Formation of Pattern Generalization Among Middle School Students: Results From a Three-Year Study*, in: Cai J. and Knuth E., (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*, Netherlands, Springer, Vol.۲, ۲۰۱۱.
- [۲۰] English L.D., and Warren E.A., *Introducing the variable through pattern exploration*, in: Gholam Azad S., (Ed.), *Roshd mathematics Education Journal*, Vol.۵۴, ۱۹۹۹, pp.۵۴-۶۰.