

دورنمایی از خلاقیت در فرآیند آموزش ریاضی

مهدی نجفی خواه^۱، نرگس یافتیان^۲ و شهرناز بخشعلی زاده^۳

چکیده: خلاقیت ریاضی اغلب یک پدیده ناشناخته محسوب می‌شود. به نظر می‌رسد بیشتر دانشمندان علاقه‌مند نیستند فرآیندهای تفکر خود را که موجب خلق و ابداع می‌شود توصیف و تحلیل نمایند. یکی از اهداف مقاله حاضر، که متکی بر یافته‌های تحقیقی معاصر می‌باشد، آن است که با اشاره به بعضی از تعاریف و ویژگی‌های خلاقیت ریاضی، به توصیف و تحلیل فرآیندهای تفکر ریاضیدانان در حین خلق ریاضیات، پردازد. در این راستا، یک مدل چهار مرحله‌ای شامل مراحل آماده سازی، کمون، جرقه ذهنی و تأیید را مورد بررسی قرار می‌دهد. با مروری بر ادبیات، معلوم می‌شود که یک تعریف خاص و قراردادی برای خلاقیت ریاضی وجود ندارد. بعضی از تعاریف تأکید می‌کنند که یک عمل خلاقانه در ریاضیات می‌تواند شامل خلق یک مفهوم مفید یا کشف یک رابطه شناخته نشده و یا تغییر در سازماندهی ساختار یک نظریه ریاضی باشد. چالش‌ها در معرفی و توسعه خلاقیت ریاضی به علت تنوع زیاد تعاریف و ویژگی‌های آن است. درک، شهود، بصیرت و توانایی تعمیم دادن از جمله نیرو محرکه‌های خلاقیت ریاضی هستند. خطایذیری یکی از ویژگی‌های فعالیت‌های خلاقانه ریاضی می‌باشد که باید مورد تقدیر قرار گیرد؛ زیرا همین وجود خطا است که می‌تواند باعث پیشروی‌های اساسی شود. لذا در آموزش ریاضی باید با توجه به این ویژگی‌ها، شرایط و بستری فراهم نمود تا یادگیری معنا دار (درک و بصیرت) از طریق برقراری ارتباطات و اتصالات بین مفاهیم و روش‌ها ایجاد شود و فرصت پرورش مهارت تعمیم دادن از این طریق فراهم گردد.

کلمات کلیدی: خلاقیت، آموزش، خلاقیت ریاضی، فعالیت‌های خلاقانه ریاضی

۱- مقدمه

زمانی که از خلاقیت و ابداع سخن می‌گوییم، این سؤال به ذهن خطور می‌کند که آیا می‌توان به جای این واژگان از واژه کشف استفاده کرد؟ از نظر ژاک آدامار^۱، کشف مربوط به پدیده یا قانون یا موجودی است که از قبل وجود داشته، ولی ناشناخته مانده است [۱]. کریستف کلمب^۲ آمریکا را کشف کرد، آمریکا قبل از او وجود داشت ولی فرانکلین^۳ برقگیر را اختراع کرد، برقگیر قبل از او وجود نداشت. البته چنین تمایزی چندان روشن نیست. توریچلی^۴ مشاهده کرد که اگر لوله بسته‌ای را وارونه در ظرف جیوه فروکنیم، جیوه تا ارتفاع معینی بالا می‌رود. این یک کشف بود اما منجر به اختراع فشارسنج شد. با اختراع تلسکوپ، منجمان موفق به کشف پدیده‌های خارق‌العاده در فضا شدند. با این مثال‌ها، به نظر می‌رسد که اکتشاف و اختراع در زندگی روزمره به یکدیگر مربوط هستند؛ اما، آیا می‌توان در مورد خلق آثار هنری یا ادبی نیز چنین نتیجه گرفت؟ از آنجا که اثر هنرمند یا ادیبی با تخیل او جان می‌گیرد و چیزی را می‌آفریند که نه شخص دیگری آن را خلق کرده و نه می‌تواند آن را خلق کند، کارهای هنری و ادبی، ابداع

خلاقیت و نوآوری، نقشی حیاتی در رشد و توسعه علم ایفا می‌کند. از طرف دیگر، از جمله مهارت‌هایی است که برای حل مسئله و لذا مواجهه با مسائل زندگی روزمره لازم است. از این رو بررسی و تبیین آن از اهمیت خاصی برخوردار است. بنابراین از جمله اهداف هر نظام آموزشی باید پرورش انسان‌های خلاق باشد، تا علاوه بر توسعه حوزه‌های علمی، در شرایط غیرقابل پیش‌بینی، بتوانند انتخاب‌ها و تصمیمات درست و شایسته‌ای را داشته باشند. از آنجا که ریاضی حوزه‌ای است که در رأس حوزه‌های عقلانی قرار دارد، خلاقیت باید در طراحی و برنامه‌ریزی فعالیت‌های آموزشی این حوزه در نظر گرفته شود.

تاریخ دریافت مقاله ۸۹/۱۰/۲۸، تاریخ تصویب نهایی ۹۰/۰۲/۱۲

^۱ دانشیار، دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران، (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی:

m_nadjafikhah@iust.ac.ir

^۲ دانشجوی دکتری ریاضی، دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران، عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

^۳ کارشناس پژوهش، دفتر مطالعات بین المللی تیمز/ پرلز، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش

وجود دارد. شاعر مورد نظر ما پل والر^۶، نویسنده، شاعر و فیلسوف معروف فرانسوی و عالم مورد نظر، فیزیکدان معروف، آلبرت انشتین^۷ است. در این کنگره که در سال ۱۹۳۷ به مدت یک هفته برگزار شد، اشخاص مختلفی در زمینه‌های مختلف به موضوع ابداع پرداختند. پل والر در زمینه شعر، بائر^۸ در زمینه علوم تجربی و ژاک آدامار، ریاضیدان معروف فرانسوی، در زمینه ریاضیات سخنرانی کردند.

اروینک^۹، خلاقیت ریاضی را یکی از فعالیت‌های بشری می‌داند که می‌تواند بر دانسته‌های موجود در ریاضیات عمل کرده و نظریه‌های جدید ریاضی را تولید کند و معتقد است که خلاقیت ریاضی اغلب یک پدیده ناشناخته محسوب می‌شود. به نظر می‌رسد بیشتر دانشمندان علاقه‌مند نیستند فرآیندهای تفکر خود را که موجب خلق و ابداع می‌شود توصیف و تحلیل نمایند. تنها تعداد کمی از ریاضیدانان از جمله پوانکاره^{۱۰} و آدامار به طور آشکار تلاش کردند که ایده‌های مرتبط با خلاقیت ریاضی را توصیف کنند و شاید بهترین منبع شناخته شده در ریاضیات آدامار باشد [۴].

آدامار یک تحقیق رسمی را در بین تعدادی از دانشمندان و ریاضیدانان برجسته و نامی از جمله جرج پولیا، آلبرت انشتین و ... انجام داد و از آنان در مورد تصاویر ذهنی و فرآیندهای تفکرشان در حین انجام کار ریاضی سؤال کرد. آدامار نتایج این تحقیقات را در کتابی با عنوان « روانشناسی ابداع در حوزه ریاضیات^{۱۱} » آورده است. این کتاب به گفته اعتماد پر از حکایت‌های جالب و نکات خواندنی است. اظهارات دست اول ریاضیدانان، فیزیکدانان، هنرمندان و اظهارنظرهای نظریه‌پردازان مبحث خلاقیت، از جنبه‌های برجسته این کتاب به شمار می‌آید [۲]. منبع الهام آدامار برای انجام این تحقیقات و نوشتن این کتاب، هانری پوانکاره، یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان و فیلسوفان است. شاید جالب باشد که بدانیم یکی از ضمیمه‌های این کتاب، نامه‌ای است که آلبرت انشتین برای جواب دادن به سؤالات آدامار در رابطه با فرآیندهای تفکرش در حین انجام کار ریاضی نوشته است.

محسوب می‌شوند؛ مثلاً سمفونی‌های موتسارت^۵ که اولین آن‌ها در ۸ سالگی بود و یا گلستان سعدی حقیقتاً ابداع است. حال ببینیم که در علوم نظری از جمله ریاضیات، وضعیت به چه صورت است؟ پاسخ این سؤال به فلسفه اعتقادی ما برمی‌گردد. برای مثال، افلاطون‌گرایان بر این عقیده‌اند که همه چیز در انسان وجود دارد و فقط ما آن را کشف کرده و به سطح می‌آوریم. ساخت و سازگرایان رادیکال نیز می‌گویند همه چیز ساخته ذهن بشر است پس باید توسط انسان ساخته شود و یا ... به نظر می‌رسد طبق نظر آدامار، خیلی فرق نمی‌کند که بگوییم کشف یا اینکه ابداع، آنچه که اهمیت دارد این است که شرایط روان شناسی در هر دو مورد، کاملاً مشابه است [۱].

برای درک ماهیت خلاقیت، یکی از راه‌ها این است که به سراغ افراد خلاق برویم و در مورد رمز و راز موفقیتشان از آنان جويا شویم. ولی شاید بهتر باشد به جای اینکه مستقیماً از آنان سؤال کنیم به گفتگوی آنان گوش دهیم و یا به هر آنچه که بروز دهنده فرآیند تفکرشان است و یا شواهدی که فرآیند تفکرشان را به تصویر می‌کشد، توجه کنیم. به گفتگوی یک شاعر و عالم توجه کنید:

شاعر: شما چطور کار می‌کنید، ممکن است کمی در باره نحوه کارکردنتان صحبت کنید؟
عالم: چه عرض کنم، نمی‌دانم... صبح‌ها از خانه بیرون می‌روم و مدتی قدم می‌زنم...
شاعر: عجب، جالب است. حتماً دفترچه یادداشتی هم با خود می‌برید که هر وقت ایده‌ای به ذهنتان خطور کرد، در آن ثبت کنید.
عالم: نه این کار ضرورتی ندارد.
شاعر: واقعا این کار را نمی‌کنید؟
عالم: آخه می‌دانید، ایده چیز خیلی نادری است و خیلی کم پیش می‌آید که واقعاً ایده‌ای جدید داشته باشم [۳و۲].

این گفتگوی به ظاهر ساده بین دو تن از نوابغ قرن بیستم است که جهت شرکت در کنگره‌ای در مرکز سنتز پاریس گرد هم آمده بودند و نشان می‌دهد که در فرآیندهای تولید ایده‌های جدید این شاعر و این عالم، تفاوت‌های اساسی

۲- روش و سؤالات تحقیق

مطالعه فوق که یک پژوهش مروری است برآن می‌باشد تا به کمک یافته‌های تحقیقاتی معاصر، دیدگاه‌های مهم نظری در زمینه خلاقیت ریاضی را مورد نقد و بررسی قرار دهد. در این راستا تلاش می‌شود تا به سؤالات زیر پاسخ داده شود:

خلاقیت ریاضی چیست؟ چگونه خلاقیت ریاضی توسعه پیدا می‌کند؟ چه چیزی عملکرد خلاقانه در ریاضی محسوب می‌شود؟ یک فرآیند خلاقانه ریاضی شامل چه مراحل است؟ ویژگی‌های فعالیت‌های خلاقانه در ریاضی کدامند؟

در نهایت پس از پاسخ به سؤالات فوق، به بیان برخی از دلالت‌ها و مضامین آموزشی در فرآیند آموزش ریاضی می‌پردازد.

خلاقیت در ریاضیات: خلاقیت، مرتبط با ساخت ایده‌های نافذ تحقیق در ذهن افراد است [۵] و یکی از موضوعات پیچیده در روانشناسی به حساب می‌آید. علی‌رغم اینکه مان^{۱۲} ذکر می‌کند که بیش از صد تعریف معاصر برای خلاقیت وجود دارد [۶] اما تأکید این مقاله بر تعاریفی است که مرتبط با ریاضیات و حل مسئله در ریاضیات است. با مراجعه به پیشینه تحقیق در ریاضی و آموزش ریاضی، تعاریف مختلفی برای خلاقیت ریاضی می‌توان یافت و این پیشینه‌ها حاکی از آن است که تعریفی به صورت قراردادی برای خلاقیت ریاضی وجود ندارد [۷ و ۸]. با توجه به مشکل بودن توصیف ساختار خلاقیت ریاضی و ویژگی‌های آن، اکثریت تعاریف موجود، چالش‌هایی را ایجاد می‌کنند. به علاوه سؤالات مختلفی به ذهن می‌رسد. آیا وقتی یک دانش‌آموز یا دانشجو مسئله‌ای ریاضی حل می‌کند که حل آن از قبل شناخته شده است این عمل او یک کار خلاقانه ریاضی در نظر گرفته می‌شود؟ آیا وقتی دانش‌آموز یا دانشجویی یک مسئله قدیمی ریاضی را به شیوه‌های جدید حل می‌کند، یک عمل خلاقانه ریاضی انجام داده است؟ آیا خلاقیت در ریاضیات منحصر به حوزه اختصاصی ریاضیدانان حرفه‌ای است؟ آیا خلاقیت در ریاضیات تنها مختص به تولید ایده‌های جدید و بکر ریاضی می‌باشد؟ تنوع تعاریف و ویژگی‌های خلاقیت ریاضی که از ادبیات

تحقیق در این زمینه یافت می‌شود، باعث چالش‌هایی در توصیف و توسعه خلاقیت ریاضی و جواب دادن به این سؤالات می‌شود.

آدامار و پوانکاره، کشف در ریاضیات یا هر حوزه دیگر را ناشی از ترکیب ایده‌ها می‌دانند. آنان معتقدند که تعداد زیادی از این قبیل ترکیب‌ها وجود دارد که احتمالاً تعداد کمی از آنها سودمند هستند و برای یافتن این ترکیب‌های سودمند، تعداد کثیری از ترکیب‌های ممکن، ساخته می‌شود تا از بین آنان، ترکیب‌های سودمند پیدا شود؛ به عبارت دیگر کشف را می‌توان تشخیص و انتخاب ترکیب‌های مهم و سودمند دانست. قوانین مربوط به چگونگی این انتخاب و گزینش از میان ترکیب‌های ممکن، لزوماً قابل تدوین نبوده، بلکه احساس شدنی است [۹ و ۱۰]. یک غربال مکانیکی وجود ندارد که این کار را انجام دهد بلکه تأثیر عمیقی از هیجانات عاطفی شخص است. به نظر می‌رسد یک نظریه صوری یا رسمی جهت فعال کردن فرآیند خلاقیت ریاضی موجود نیست تا از طریق آن، شخص بداند که با انجام اعمال معینی می‌تواند خلاقیت ریاضی را در خود شکل دهد. در این خصوص اروینک معتقد است که حتی به نظریه‌ای در این زمینه نیاز نداریم؛ زیرا بیشترین قسمت‌های خلاقیت از طریق شهود شکل می‌گیرد و شهود افراد و شکل‌گیری آن با یکدیگر متفاوت است. او همچنین معتقد است خلاقیت ریاضی نقش حیاتی در چرخه کاملی از تفکر ریاضی پیشرفته دارد و باعث حدسیه سازی در جهت توسعه، پیشبرد و خلق نظریه‌های ریاضی می‌گردد. او شکل‌گیری تعریف یک مفهوم جدید ارزشمند ریاضی با استفاده از مفاهیم قبلی را مثالی از فعالیت خلاقانه ریاضی می‌داند [۴].

پوانکاره و آدامار، دو تن از ریاضیدانان معروف فرانسوی، معتقدند که خلاقیت در ریاضیات، فرایندی است که در آن ریاضیدانان بین سؤالاتی که منجر به نتایج مفید و سودمند می‌شود و سؤالاتی که نتیجه‌ای در بر ندارد انتخاب و گزینش می‌کنند [۱۱]. لی‌کوک^{۱۳} خلاقیت ریاضی را توانایی تحلیل یک مسئله داده شده به شیوه‌های مختلف و انتخاب یک روش مناسب برای روی آوردن به وضعیت‌های ناآشنا در ریاضیات می‌داند [۱۲].

آن شخص با استفاده از تجارب قبلی خود آماده برداشتن گام یا گام‌های مهمی به سمت یک جهت جدید می‌شود. چنین آمادگی از طریق محیط مناسبی برای رشد خلاقیت ایجاد می‌شود. او مراحل رشد خلاقیت ریاضی را شامل سه مرحله مقدماتی تکنیکی^۶ (مرحله صفر)، فعالیت الگوریتمی^۷ (مرحله اول) و فعالیت خلاقانه^۸ (مرحله دوم) در نظر می‌گیرد که در زیر به آن پرداخته می‌شود [۴].

قبل از انجام یک فعالیت ریاضی بکر، نیاز به مرحله‌ای مقدماتی - تکنیکی است، مرحله‌ای که شامل نوعی کاربرد عملی یا تکنیکی از قواعد و رویه‌های ریاضی است، بدون این که کاربر از بنیان‌های نظری آن آگاهی داشته باشد. برای مثال، ممکن است یک صنعتگر مجموعه‌ای از رویه‌های ریاضی را به عنوان جعبه ابزار کارش استفاده کرده تا محصولش را تولید کند؛ ولی نداند که ریاضیات پشت آن چیست [۴]. بسیاری از ما معمارهای قدیمی را دیده‌ایم که برای ساختن سطح عمود از شاقول استفاده می‌کنند؛ ولی قواعد ریاضی مربوط به آن را نمی‌دانند. توجیه استفاده از این رویه‌ها، این است که آنها به طور تجربی بررسی شده‌اند و این کاربران به طور تجربی به این نتیجه رسیده‌اند که اگر این قواعد به درستی به کار برده شوند، نتایج مورد قبول خواهند بود. مثال دیگر از چنین رویه‌های عملی، روشی است که در مصر باستان برای ساختن زاویه قائمه به کار می‌بردند. آنان از یک طنابی استفاده می‌کردند که با علامت‌هایی به سه قسمت به طول‌های ۳ و ۴ و ۵ تقسیم شده بود. این مرحله تدارکاتی قسمتی از نظریه‌های مدرن یادگیری ریاضی است که بنا بر آن فرض می‌شود قبل از آن که یک ایده به عنوان یک شیء، مورد تفکر و تعمق قرار گیرد، ابتدا باید به عنوان یک ابزار برای بخشی از فعالیت حل مسئله ارائه شود تا جزئی از ساختار شناختی تجربی فرد شود.

در مرحله فعالیت الگوریتمی، رویه‌ها جهت اجرای عملیات ریاضی به کار برده می‌شوند. فعالیت‌های الگوریتمی ریاضی اساساً به اجرای تکنیک‌های ریاضی توجه دارند [۴]. مثال‌هایی از چنین تکنیک‌هایی عبارتند از: حل کردن یک معادله با استفاده از روش تجزیه؛ محاسبه حد؛ مشتق و انتگرال. این تکنیک‌ها، فعالیت‌های الگوریتمی هستند که در فرآیند خلق ریاضیات مورد نیازند. اگرچه به کارگیری

سریرامن^{۱۴} بیان می‌کند که خلاقیت در ریاضیات نه تنها مرتبط با کار اصیل و بکر ریاضیدانان است، بلکه کشف بعضی مواردی را که از قبل شناخته‌اند، توسط شخصی که این کشف برای او جدید است نیز شامل می‌شود [۱۱]. این رویکرد به خلاقیت ریاضی می‌تواند سازگار با گفته آدامار باشد که معتقد است بین کار ابداع توسط ریاضیدانان و کار یک دانشجویی که تلاش می‌کند یک مسئله در جبر یا هندسه را حل کند تنها تفاوت درجه و سطح وجود دارد و هر دو کار از نظر ماهیتی مشابه یکدیگرند [۱]. با توجه به اینکه تنها بر اساس مفید و مبتکرانه بودن محصول فعالیت خلاقانه نمی‌توان تعریفی عملی از خلاقیت ریاضی برای وضعیت‌ها و سطوح مدرسه‌ای ارائه داد، بعضی از محققین بین تعریف خلاقیت ریاضی در سطح حرفه‌ای و در سطح مدرسه‌ای تمایز قائل شده‌اند [۱۳]. به طور طبیعی در سطح مدرسه‌ای از دانش‌آموزان انتظار کارهای خارق‌العاده نمی‌رود، با این وجود در همین سطوح دانش‌آموزان قادرند که بینش‌های جدیدی در مسائل ریاضی از خود نشان دهند [۱۱ و ۱۴]. طی گفتگویی در خصوص مفهوم خلاقیت ریاضی، سریرامن پیشنهاد می‌کند که در سطح حرفه‌ای می‌توان خلاقیت ریاضی را توانایی تولید کاری اصیل که به طور معناداری پیکره دانش را توسعه می‌دهد و یا گشودن راه‌هایی برای مطرح شدن سؤالات جدید برای دیگر ریاضیدانان تعریف کرد و در سطح مدرسه‌ای خلاقیت ریاضی به عنوان فرایندی تعریف می‌شود که منجر به جواب یا جواب‌های بدیع، غیر معمول و خردمندانه می‌گردد و یا این که باعث شکل‌گیری سؤالات جدیدی می‌شود که به یک مسئله قدیمی امکان بررسی از زاویه دید متفاوتی را می‌دهد [۱۴].

توسعه خلاقیت ریاضی: لیکن^{۱۵} بیان می‌کند که خلاقیت

ریاضی یک ویژگی پویا از ذهن بشری است که می‌توان با قردانی از پتانسیل خلاقانه دانش‌آموزان آن را بهبود و توسعه داد و یا بر عکس، با عدم توجه باعث سرکوبی آن شد [۱۵]. از نظر روان‌شناسی، خلاقیت دارای سطوح مختلفی است و در نتیجه قابل رشد است. این رشد شامل مراحل مختلفی است. به گفته اروینک، خلاقیت ریاضی نمی‌تواند در خلأ رخ دهد، بلکه نیازمند بافتی است که در

به نظر می‌رسد که یک نظریه صوری یا رسمی برای بروز فرآیند خلاقیت ریاضی وجود ندارد تا از طریق آن، شخص بداند که می‌توان با انجام اعمال معینی خلاقیت ریاضی را در خود شکل داد؛ اما از نظر اروینک حالت ذهنی شخص جهت آمادگی برای فعالیت ذهنی، امری اساسی است. از طرف دیگر، برای رسیدن شخص به سطح بالای خلاقیت، به دقت در ساختارهای ذهنی نیاز دارد، تا هم راستا شده و الگوهای موجود، تقویت گردد. هم راستا به این معنی است که طوری هدایت و جهت‌دار شود که با الگوهایی که از قبل وجود داشته، هماهنگ بوده و با آنها ضدیت نداشته، بلکه آنها را توسعه دهد [۴].

عملکرد خلاقانه در ریاضی: برای تحلیل نقش خلاقیت

ریاضی در بافت‌های جدید، به عبارت دیگر خلاقیت در سطح تولید دانش ریاضی^{۲۰} در بافت جدید، باید ماهیت آن ریاضیات پیشرفته را هم در نظر بگیریم. در این حالت خلاقیت مانند ابزاری برای ساخت ریاضیات جدید عمل می‌کند. برای مثال ماهیت ریاضی در هندسه با ماهیت ریاضی در جبر متفاوت است، تجسم در تولید هندسه تأثیر زیادی دارد و یا شکل اثبات‌ها و استدلال‌های هندسی با نوع جبری آن ماهیتاً متفاوت است. همچنین ماهیت اصول موضوعه هندسی با ماهیت اصول موضوعه جبری تفاوت‌هایی دارند؛ بنابراین در این مورد، ماهیت ریاضیات جدید باید در خلاقیت ریاضی مورد توجه قرار گیرد.

یک نظریه ریاضی، چارچوبی متشکل از تعریف مفاهیم و همچنین روابط بین مفاهیم تعریف شده می‌باشد. اگر به مفاهیم به عنوان گره‌هایی از یک شبکه نگاه شود، روابط می‌توانند فلش‌هایی باشند که گره‌ها را به هم ارتباط می‌دهند. از نظر اروینک، خلاقیت ریاضی عبارت است از دست‌یابی به بصیرت برای ساخت بخش‌هایی از چنین چارچوبی و همچنین می‌تواند جهت توسعه چنین ساختارهایی نیز عمل کند [۴]. بنابراین یک دید ترکیبی از عمل خلاقانه در ریاضیات می‌تواند شامل چندین دسته باشد که به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم. دسته اول شامل خلق یک مفهوم جدید بوده که اغلب از طریق ترکیب مفاهیم یا روابط به دست می‌آید، که باید مفید نیز باشد؛ به این معنی که قادر باشد تا ابعاد بیشتری از یک نظریه

این الگوریتم‌ها ممکن است به خودی خود خلاقیت خاصی نداشته باشند؛ اما در حین تولید ریاضیات پیشرفته، مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر فعالیت‌های الگوریتمی در یادگیری ریاضی اساسی هستند؛ زیرا چنین فرآیندهایی قبل از آنکه به عنوان اشیاء ذهنی در یک نظریه مرتبه بالا به آنان نگاه شود، باید در این مرحله درونی شده و بدون نیاز به تعمق و تأمل، از آنها استفاده شوند. برای مثال اگر ریاضیدان در فعالیت خلاقانه‌اش نیاز داشته باشد که از قاعده مشتق حاصل ضرب استفاده کند، دیگر به خود نمی‌گوید «مشتق حاصل ضرب برابر است با مشتق اولی ضرب در دومی به علاوه ...»، بلکه در مرحله بعدی، یعنی فعالیت خلاقانه، نیاز دارد که قاعده مشتق حاصل ضرب برای او درونی شده و از آن، بدون تأمل استفاده کند؛ یعنی قاعده مشتق‌گیری بدون در نظر گرفتن اجزا و مراحل آن به شکل مجزا، به عنوان یک شیء ذهنی، کپسوله^{۱۹} شده و در هنگام نیاز به کار می‌آید. در مثال دیگر می‌توان به یک متخصص جبر اشاره کرد که برایش گروه، حلقه و ... هر یک به عنوان یک شیء ذهنی کپسوله شده هستند. البته ذکر این نکته در ارتباط با مرحله صفر و مرحله اول ضروری است، که اگرچه مرحله صفر نیز ابزاری است؛ اما نوع ابزار آن با مرحله اول فرق می‌کند. اگر بخواهیم این مورد را به زبان ویگوتسکی توضیح دهیم، می‌توان گفت که دو نوع ابزار وجود دارد: یکی ابزاری که از بیرون عمل می‌کند (Tool) و دیگری ابزاری که از درون عمل می‌کند (Sign) و زمانی است که به صورت یک مفهوم درونی در ذهن جا می‌گیرد. در این مورد نیاز به بازخوانی تعریف و ویژگی‌های آن مفهوم نیست، بلکه به صورت یک شیء در ذهن کپسوله شده و به هنگام نیاز از آن به عنوان ابزار استفاده می‌کند. قبل از این که ابزار به عنوان تمرکز یک فعالیت فکری قرار گیرد، باید با آن در یک عمل آشنا شد.

در مرحله فعالیت خلاقانه، خلاقیت ریاضی رخ می‌دهد و تصمیم غیرالگوریتمی گرفته می‌شود؛ یعنی تصمیمی که با الگوریتم به آن نمی‌توان رسید. این تصمیم به شیوه‌ای است که به انشعاب یا جوانه‌ای از ساختار یک مفهوم اساسی ریاضی، که از قبل وجود داشته، معنی می‌بخشد. مثلاً تصمیم برای اینکه یک مفهوم جدید تعریف شود و یا تصمیم برای بیان یک قضیه یا یک اثبات یا تعمیم آن [۴].

حاضر باشند. همان طور که گفتیم، شخص خلاق باید ساختار، مفاهیم، روابط و ماهیت آن شاخه از ریاضی را بشناسد؛ به عبارت دیگر باید نسبت به آنها درک و فهم داشته باشد و این درک و فهم لازمه بصیرت داشتن شخص نسبت به آنها است و وقتی بصیرت وجود داشته باشد باعث درک و فهم در سطح بالاتری می‌شود. از نظر لاکاتوش^{۲۶} نقش شهود در ریاضی، هم در خلق مفاهیم و هم در ارائه برهان برای درستی یا نادرستی حدس‌ها تعیین کننده است [۱۷ و ۱۸]؛ بنابراین می‌توان گفت که اگر شهود در مسیر درستی باشد، به شخص کمک می‌کند که شکل‌گیری تصاویر ذهنی مفهوم^{۲۷} به قدر کافی به مفهوم صوری^{۲۸} و رسمی آن نزدیک‌تر باشد؛ در نتیجه باعث ارائه حدسیات معقول‌تری می‌گردد. سپس شخص این حدسیات را بررسی کرده و باعث بینش بالاتری شده و در نتیجه سبب شکل‌گیری فرضیات می‌شود. تا وقتی که آن بصیرت لازم به وجود نیاید، شخص نمی‌تواند تعمیم لازم را ارائه دهد؛ به ویژه، اگر تعمیم به حوزه و بافت جدیدی باشد. سریرامن بیان می‌کند که تعمیم شکلی از فعالیت خلاقانه ریاضی محسوب می‌شود [۱۹]. پولیا^{۲۹} از قول کانت^{۳۰} بیان می‌کند که «همه شناخت انسان، با شهود شروع شده و به فهم و درک می‌رسد و سرانجام به ایده‌ها ختم می‌شود» [۲۰]. حال ببینیم که ریاضیدانان چگونه و چه فرآیندی را طی می‌کنند تا یک عمل خلاقانه ریاضی رخ دهد.

فرآیند خلاقانه: این سؤال پیش می‌آید که آیا تصادف و شانس باعث خلاقیت می‌شود؟ جواب به این سؤال این است که نقش تصادف و شانس را نمی‌توان نفی کرد؛ مثلاً در مورد کشف ارشمیدس، یک قسمت آن شاید تصادف و شانس بود. اگر ارشمیدس در آن لحظه خاص، در آب نبود و احساس سبکی نمی‌کرد، شاید به آن کشف مهم نائل نمی‌شد؛ اما بی‌انصافی و حتی نادرست است که کشف او را صرفاً نتیجه تصادف و شانس بدانیم و از مراحل دیگر غافل باشیم. والاس^{۳۱} یک فرایند چهار مرحله‌ای را برای حل مسئله^{۳۲} شامل مراحل آماده سازی^{۳۳}، کمون^{۳۴} (رشد نهفته، پختگی)، جرقه ذهنی^{۳۵} (تنویر فکر، الهام ناگهانی) و بررسی و تأیید^{۳۶} در نظر می‌گیرد [۲۱]. با توجه به این که حل مسئله به یک وضعیت ناشناخته اشاره می‌کند، حل مسئله

ریاضی را باز کند. دسته دوم می‌تواند کشف یک رابطه شناخته نشده باشد. دسته دیگر، شامل تغییر در سازماندهی ساختار یک نظریه ریاضی، که در بالا شرح داده شده، است؛ به عبارت دیگر یک نوع کار خلاقانه می‌تواند این باشد که شبکه روابط بین مفاهیم را عوض کند. برای مثال اکثر کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم انتگرال را بعد از مفهوم مشتق مطرح می‌کنند؛ ولی فکر کردن به احتمال بهتر بودن آموزش مفهوم انتگرال قبل از مفهوم مشتق، کاری خلاقانه است؛ بنابراین حتی اگر شخص تصمیم بگیرد و حتی به فکر این هم بیفتد که می‌توان سازماندهی شبکه مفاهیم را در جهت بهبود آن تغییر داد، علی‌رغم این که به ظاهر، ریاضی جدیدی تولید نکرده؛ ولی فعالیت خلاقانه‌ای انجام داده است. در این خصوص ریکارت^{۳۱} یک توصیف ساختاری برای خلاقیت ریاضی بیان می‌کند. او خلاقیت ریاضی را شامل جایگزینی ساختاری شناخته شده با یک ساختاری جدید و بزرگتر می‌داند و معتقد است که یک توسیع مناسب زمانی که از نظر ریاضی زیباتر است، بهتر در ذهن نهادینه می‌شود [۱۶].

با توجه به مطالب ذکر شده، شخص خلاق در ریاضی نیاز دارد مفاهیم، ارتباطات و همچنین ساختارهای مربوط به آن را بشناسد و در صورت نیاز، ترتیب آنها را تغییر داده و ساختار را سازماندهی کند، به گونه‌ای که ماهیت منطقی-استنتاجی ریاضی را در نظر گرفته و با مفاهیم تولید شده قبلی، جفت و جور باشد. همچنین باید مفاهیم جدید بتوانند در این شبکه ارتباطی، جا داده شده و با آن تلفیق شوند؛ در نتیجه یک تعریف تجربی از خلاقیت ریاضی به بیان اروینک می‌تواند به این صورت باشد که خلاقیت ریاضی توانایی برای حل مسئله و یا توسعه ساختارهای فکری (شناختی) با در نظر گرفتن ماهیت منطقی-استنتاجی ریاضی است [۴]. این تعریف از خلاقیت ریاضی با تعریف ریکارت سازگار است. یکی از دیگر سؤالاتی که در این حوزه مطرح می‌شود این است که نیرو محرکه‌های خلاقیت ریاضی کدامند؟

نیروی محرکه خلاقیت ریاضی، از تعامل عناصر مختلفی تشکیل شده است که بعضی از این عناصر عبارتند از: درک^{۳۲}؛ شهود^{۳۳}؛ بصیرت^{۳۴} و توانایی تعمیم دادن^{۳۵} [۴]. در حقیقت در فعالیت خلاقانه ریاضی باید موارد فوق همگی

در ریاضی به عنوان یک فعالیت خلاقانه ریاضی محسوب می‌شود.

در مرحله آماده‌سازی، شخص به طور آگاهانه خود را مجبور می‌کند که روی یک مسئله یا ایده جدید، سخت کار کند. این مرحله بر ضرورت کار سخت روی مسئله که به طور آگاهانه انجام می‌شود، تأکید می‌کند. البته برای اینکه به ثمر بنشیند، ذهن به استراحتی نیاز داد که آرامش پیدا کند تا توانایی‌اش را به دست آورد که آغاز مرحله کمون است. در مرحله کمون، ایده‌ها به شیوه‌ای آرام و غیراجباری به هم مرتبط می‌شوند. گویا اشاره می‌کند، در دوره کمون، فرد نسبت به مسئله ظاهراً خاموش شده و فعالیتی انجام نمی‌دهد؛ اما ناخودآگاه او، بی‌صدا در حال فعالیت است و این فعالیت ناخودآگاه چنان ادامه می‌یابد تا فرد، با الهامی می‌شکند و فریاد «یافتم، یافتم» سر می‌دهد [۲۲]. به عبارت دیگر جرقه ذهنی زده می‌شود و احساس لحظه «آهان» را تجربه می‌کند. همچنین پولیا نیز معتقد است که گاهی اوقات بهتر است بعد از تلاش زیاد روی یک مسئله، برای مدتی آن را رها کرده و فرصتی را برای آرام گرفتن خودمان و مسئله ایجاد کنیم [۲۳]. در این صورت، ممکن است فردا با کوشش کمتر، نتیجه بهتری به دست آوریم.

به عبارت دیگر، جرقه‌های ذهنی هرگز اتفاق نمی‌افتد مگر پس از چند روز کوشش خود خواسته و آگاهانه؛ بنابراین بدون تلاش نباید منتظر بود که راه حل الهام شود. در ابتدا باید تلاش‌های آگاهانه‌ای داشته باشیم که ممکن است بی‌فایده به نظر برسد و هیچ نتیجه خوبی را نوید ندهد و حتی راهی که در پیش گرفته شده، شاید کاملاً انحرافی به نظر آید. پوانکاره ابراز می‌دارد که این تلاش‌ها آن طور که شخص فکر می‌کند، عقیم نبوده و آنها می‌توانند ماشین ناخودآگاه را به کار اندازند و این ماشین بدون آن تلاش‌ها، نه می‌توانست حرکتی داشته باشد و نه چیزی را تولید کند [۹]. وجود و اثرات دوره کمون در یک بررسی فرا تحلیلی از ۱۱۷ مطالعه تجربی در این زمینه توسط سیبو و اورمرود^{۳۷} (۲۰۰۹) انجام شده است که در قسمت بعدی مقاله به آن می‌پردازیم.

آدامار معتقد است که یکی از علل عمده جرقه ذهنی ممکن است عدم دخالت‌هایی باشد که در مرحله اولیه، راه پیشرفت را سد می‌کند. وقتی شخص راه اشتباهی را آغاز

می‌کند، خیلی وقت‌ها در گودالی می‌افتد که در آن لحظه نمی‌تواند از آن رهایی یابد. کمون شامل رهایی از خطوط اشتباه و فرضیات مانع شونده است تا بتوان با ذهنی باز و بدون اجبار با مسئله برخورد کرد [۱].

با این وجود فرآیند خلاقانه در اینجا هنوز تمام نشده است. مرحله تأیید شامل بیان نتایج به زبان ریاضی و توجیه صوری آن است. به گفته‌ی دیوید تال^{۳۸}، در این مرحله نتایج در معرض تحلیل‌های بی‌احساس و سرد نور روز قرار می‌گیرد و فرضیات به گونه‌ای اصلاح می‌شوند که استنتاج‌ها از نقطه‌نظر موشکافانه تحلیلی، صادق و برقرار باشند [۵]. محصول خلاقیت ریاضی باید از نظر جامعه ریاضی قابل قبول باشد.

سریرامن در یک تحقیق کیفی بین پنج ریاضیدان برای تعیین کاربردی بودن مدل والاس به این نتیجه رسید که به طور عموم فرایندهای خلاقانه ریاضیدانان از مدل والاس تبعیت کرده و این مدل هنوز کارایی دارد [۷]؛ بنابراین، اگرچه نمی‌توان نقش تصادف را در تولید محصول خلاقانه مورد تردید قرار داد، نسبت دادن آن به تصادف محض نیز صحیح نیست و شامل مراحل متعددی است. مثلاً ارشمیدس، قبل از آن لحظه خاص که او فریاد «یافتم، یافتم» سردهد و برهنه از حمام بیرون بیاید، مرحله آمادگی انجام شده بود و در حالی که دوره کمون طی می‌شد، بخت با او یار گشت و جرقه ذهنی لازم زده شد.

تحقیق و بررسی مرحله آماده سازی و مرحله تأیید از نظر روان شناسی به مراتب ساده‌تر از مراحل دیگر است. به عبارت دیگر، از آنجا که دوره کمون مرتبط با ناخودآگاه انسان می‌باشد و بروز و نمایش بیرونی ندارد (قابل مشاهده نیست)؛ بنابراین از ابهام و پیچیدگی خاصی برخوردار است. از نظر الوود^{۳۹} و همکاران، برای محققین به اثبات رسیده است که تحقیقات علمی روی فرایندهای مرحله کمون در مقایسه با مراحل دیگر مشکل‌ترند [۲۵]؛ بنابراین توجه و توضیح بیشتر در زمینه نقش این مرحله در فرایند حل مسئله ضروری می‌باشد.

اهمیت دوره کمون: والاس در دومین مرحله از مراحل چهارگانه‌اش (مرحله کمون) بیان می‌کند که بعد از یک دوره کار سخت جهت حل کردن مسئله^{۴۰} (حل مسئله^{۴۱}) و

کمون فرصتی را برای انتقال توجه از مسئله به موضوعات دیگر فراهم آورده که منجر به بینش یا احساس تجربه « آهان» می‌گردد. این دوره فرصتی برای دیدن مسئله از زاویه‌های دیگر را فراهم می‌کند.

فرضیه رها کردن چارچوب‌ها یا رها کردن تمرکز بیش از حد روی چیزی، بیان می‌کند که در تلاش‌های متعدد اولیه برای حل مسئله، خیلی اوقات شخص بر روابط و استراتژی‌های خاصی بیش از حد تمرکز کرده که حقایق یا ایده‌های نا مرتبط هستند. این افکار به عنوان مسدود کننده‌هایی عمل می‌کنند و باعث ایجاد موانعی برای فراهم آمدن بینش‌های خلاقانه جهت حل مسئله مورد نظر می‌شوند. کیم^{۴۶} معتقد است که تاریخ کشفیات نشان می‌دهد بسیاری از مسئله حل‌کن‌های موفق، زمانی به حل مسئله خود دست یافتند که اساساً در آن زمان به طور جدی درگیر مسئله خود نبوده‌اند [۳۱].

خطا پذیر بودن فعالیت‌های خلاقانه ریاضی: یکی از ویژگی‌های فعالیت‌های خلاقانه ریاضی، خطاپذیر^{۴۷} بودن آن است. خلاقیت ریاضی یک فعالیت بشری است بنابراین همراه با خطاهای انسانی است. از نقطه نظر لاکاتوش، ریاضیات به این صورت نیست که از قبل مسیرها کاملاً مشخص شده باشد و بتوان گام به گام با اطمینان زیادی مراحل را به پیش برد. به همین دلیل ممکن است شخص وارد حیطه‌ای شود که در آن خطا وجود داشته و دچار عیب و نقص گردد [۱۸]. از نظر اروینک، هیچ ضمانتی برای درستی قضایایی که صورت‌بندی شده‌اند و یا حتی اثبات‌های درست قضایا، وجود ندارد [۴]؛ به عبارت دیگر فعالیت‌های خلاقانه ریاضی ممکن است گاهی اوقات با بصیرت زیادی همراه باشد؛ اما ممکن است شامل ظرافت‌های خاصی که باید دیده می‌شد، نباشد.

اگرچه فعالیت‌های خلاقانه ریاضی می‌تواند همراه با خطا باشد؛ اما همین امکان وجود خطا در فعالیت‌های خلاقانه ریاضی است که باعث می‌شود پیشروی‌های اساسی و دست‌آوردهای موفق بشری به وجود آیند. به نظر می‌رسد که این خطاپذیری در ریاضی‌دانان به علت شهود اولیه آنان قبل از دنبال کردن استدلال‌های منطقی است. اگر قرار بود که ریاضی‌دانان تنها با منطق پیشروی کرده و به شهود

عدم کسب موفقیت در به دست آوردن جواب، به نظر می‌رسد که بعضی از شکاف‌ها و ناسازگاری‌ها در حقایق موجود ایجاد شده که ظاهراً منجر به بن بست‌های ذهنی می‌شود. وول و پاشلر^{۴۲} معتقدند که اگر به جای کار پیوسته روی مسئله، وقفه‌ای ایجاد گردد در این زمان جواب مسئله موفقیت آمیزتر است [۲۶]. با قاطعیت می‌توان بیان کرد که امروزه فواید دوره کمون کاملاً برای ریاضیدانان مشهود است [۲۷].

احتمالاً اکثر ما این تجربه را چه در زندگی روزمره و چه حل مسائل علمی داشته‌ایم. مطالعات متعددی نقش دوره کمون و تأثیرگذاری آن را در حل مسئله خلاقانه مورد بررسی قرار داده‌اند. سیبو و اورمروود مروری فرا تحلیلی روی ۱۱۷ مقاله از مطالعات آزمایشی انجام دادند؛ مقالاتی که وجود و اثرات کمون روی حل مسئله را مورد بررسی قرار می‌دادند. طبق این گزارش، درک نقش دوره کمون از اهمیت زیادی برخوردار است و اجازه می‌دهد که از آن در جهت توسعه و پرورش خلاقیت در حوزه حل مسئله، یادگیری کلاس درس و محیط‌های کاری استفاده شود [۲۴].

اگر چه مکانیسم‌های تحت فرایند مرحله کمون مبهم و پیچیده‌اند [۲۸]، ادبیات تحقیق در زمینه حل مسئله خلاقانه فرضیه‌های متعدد پراکنده‌ای را جهت توضیح نقش دوره زمانی کمون گزارش می‌کند. سه فرضیه مشهور تر در این زمینه عبارتند از:

- فرضیه خستگی^{۴۳} [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۹]
- فرضیه کار ناخودآگاهانه^{۴۴} [۱، ۲۴، ۲۹، ۳۰، ۳۱]
- فرضیه رها کردن چارچوب‌ها یا تمرکز بیش از حد روی آنها^{۴۵} [۲۶، ۲۹، ۳۰، ۳۲، ۳۳، ۳۴]

فرضیه خستگی بیان می‌کند که در طی کار سخت روی حل مسئله، شخص از نظر ذهنی خسته می‌شود. دوره کمون باعث می‌شود که فرد استراحت کند و به این ترتیب موجب بازیابی خستگی ذهنی می‌شود. در نتیجه شخص با طراوت و شادابی بیشتری به حل مسئله پرداخته و باعث تجربه لحظه «آهان» و شکفتن جواب در ذهن فرد می‌شود. فرضیه کار ناخودآگاهانه به این ایده می‌پردازد که در طی دوره کمون، شخص توجه فعال روی حل مسئله را رها کرده که منجر به فرایند ناخودآگاه روی حل مسئله می‌شود.

شبکه ساخت شناختی فرد جا گرفته باشد. از این شبکه همانند یک داربست برای رشد، توسعه و ساخت مفاهیم استفاده می‌شود. پس لازم است آموزش به گونه‌ای باشد که شرایط را چنان فراهم کند تا این گونه درک، یعنی درک معنادار شکل بگیرد.

استاندارد *ارتباطات و اتصالات ریاضی* که یکی از اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای (NCTM⁵⁰-2000) است، ضمن بیان اینکه ارتباطات و اتصالات درون و برون ریاضی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، تأکید می‌کند به جای این که دانش‌آموزان ریاضیات را مانند مجموعه‌ای از موضوعات، ایده‌ها و مهارت‌های جدا از هم ببینند، سعی شود فرصتی فراهم گردد که دانش‌آموزان به خوبی از ارتباطات و اتصالات میان مفاهیم و ایده‌های ریاضی آگاه شوند تا موجب درک عمیق‌تر آنان گردد [۳۵]. اتصال میان موضوعات مختلف ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا ریاضیات را مانند یک کل منجمد ببینند و این امر سبب می‌شود که مفاهیم ریاضی به طور معناداری درک شده و باعث بصیرت شود. این ارتباطات و اتصالات می‌توانند بین مفاهیم و موضوعات ریاضی و یا بین شاخه‌های مختلف ریاضی باشند.

همان‌طور که قبلاً گفته شد، تعمیم دادن در ریاضی شکلی از فعالیت‌های خلاقانه ریاضی محسوب می‌شود. از طریق تعمیم می‌توان بین مفاهیم، ایده‌ها و رویه‌ها ارتباط برقرار کرد. برای مثال می‌توان جهت به دست آوردن حجم یک هرم ناقص مربع القاعده از مساحت دوزنقه استفاده کرد [۳۵]. به این ترتیب روش به دست آوردن مساحت دوزنقه تعمیم داده شده و حجم یک هرم ناقص مربع القاعده با استفاده از آن به دست می‌آید؛ بنابراین بین روش‌های به دست آوردن مساحت یک دوزنقه و حجم یک هرم ناقص ارتباط و اتصال برقرار می‌شود (شکل ۱).

اجازه ظهور داده نمی‌شد و اگر شمشیر تیز دقت بر گردن ریاضی‌دانان بود، در ریاضی نه ایده‌ای خلق می‌شد، نه رابطه‌ای کشف می‌شد و نه نظریه‌ای شکل می‌گرفت. مثلاً اثبات‌هایی که برای اصل پنجم اقلیدس ارائه می‌شد و همگی همراه با خطا بود، در قرن بیستم سبب به وجود آوردن هندسه ناقلیدسی شد. برای مثال دیگر، می‌توان به حدس پوانکاره^{۴۸} اشاره کرد که حدود یک قرن ریاضی‌دانان برای اثبات آن تلاش می‌کردند. تا اینکه بالاخره این حدس در سال ۲۰۰۶ توسط پرلمان^{۴۹} اثبات شد. اما به جرأت می‌توان گفت که اثبات پرلمان حاصل تلاش و ارائه راه‌حل‌های مختلف ریاضی‌دانانی نیز بود که در آن صد سال برای اثبات آن تلاش خلاقانه کردند، اگرچه تلاش‌های آنان همراه با خطا بود.

از نظر اروینک، خطاپذیر بودن فعالیت‌های خلاقانه ریاضی از جمله ویژگی‌های آن است که بعضی از افراد به راحتی با آن کنار نمی‌آیند. از آنجا که فعالیت‌های خلاقانه ریاضی آن قطعیت لازم را برای این افراد به همراه ندارد، ترجیح می‌دهند که به دنبال الگوریتم‌هایی باشند که آن یقین را برای رسیدن و دست یابی به حل دسته‌ای از مسائل به آنان بدهد [۴]. شاید یکی از دلایل عمده، تربیت ریاضی این افراد باشد و اینکه آنان با کار واقعی ریاضی‌دانان و نحوه خلق مفاهیم آشنا نیستند.

۳- خلاقیت و آموزش ریاضی

اگرچه خیلی اوقات دیده می‌شود که خلاقیت را به مفهوم نبوغ یا توانایی خارق‌العاده، وابسته می‌کنند؛ اما آموزشگران ریاضی، با شناخت عناصر و ویژگی‌های خلاقیت ریاضی، آن را تنها به نبوغ وابسته نمی‌کنند. همان‌طور که قبلاً شرح داده شد، درک، شهود، بصیرت و توانایی تعمیم دادن، از جمله نیروهای محرکه‌ی خلاقیت ریاضی هستند و این آموزشگران ریاضی، با آگاهی از این عناصر، بر این باورند که خلاقیت ریاضی می‌تواند به طور گسترده‌ای در بین دانش‌آموزان و دانشجویان پرورش داده شود.

درک و بصیرت در آموزش زمانی رخ می‌دهد که اتصالات و ارتباطات بین مفاهیم و حوزه‌های مختلف ریاضی برای یادگیرنده مشخص شده و با ساختار شناختی ذهن او هماهنگی پیدا کرده باشد؛ به عبارت دیگر، مفاهیم در

تربیت ریاضی اکثر دانش‌آموزان و دانشجویان به گونه‌ای است که مستقیم یا غیرمستقیم به آنان آموزش‌هایی داده می‌شود که تصور می‌کنند همه ریاضی فقط منطقی، معین، قابل حل و قابل توضیح است. این فراگیران، از پشت صحنه‌های ریاضی بی‌خبرند. مدرسین غالباً به مخاطبین پشت صحنه‌های ریاضی را نشان نمی‌دهند. شاید شما مدرسینی را دیده باشید که اگر قضیه‌ای را که می‌خواهند سرکلاس ارائه کنند فراموش کرده باشند، در گوشه‌ای از تابلو کلاس، طوری که مخاطبین نبینند چیزهایی را برای خود می‌نویسند و بلافاصله پاک می‌کنند. اما ای کاش آن شهود و آن پشت صحنه‌ها و فرایندهای طی شده برای رسیدن به جواب‌ها نیز ارائه شود تا فکر نکنند ریاضیاتی که به آنان ارائه می‌شود از همان اول به صورت شسته، رفته و آماده همراه با اثبات‌های صوری و رسمی است؛ در نتیجه به این باور برسند که آنان نیز می‌توانند یکی از خلاقان ریاضی باشند و قادرند سهم‌شان را در تولید دانش ریاضی ایفا کنند و در عین حال با فرآیندهای تفکر خلاقانه یک مسئله حل کن آشنا شوند.

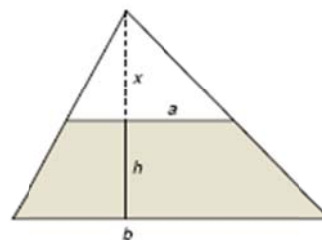
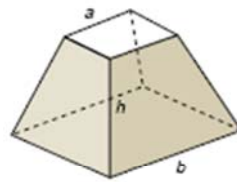
اگر چه شهود برای اعتبار بخشیدن خود نیاز به دقت و منطق دارد؛ ولی نقطه مقابل دقت نیست [۵] بلکه از تعامل بین این دو، ایده‌های ریاضی شکل می‌گیرند. در حقیقت شهود گامی مؤثر در جهت رسیدن به ریاضیات صوری و رسمی است. در این خصوص، به دلیل وجود ساختارهای منطقی در ریاضیات، دیوید تال، منطق را یکی از ابزارهای پرورش شهود می‌داند [۵].

بنابراین با فراهم آوردن محیطی مناسب در طی فعالیت‌های هدایت شده، می‌توان از فراگیران انتظار داشت که در تولید یک ایده ریاضی مشارکت داشته و تشویق به بازتولید ایده‌های ریاضی به شیوه بازسازی شوند.

۴- نتایج و بحث

در این بخش به طور اجمال به سؤالات تحقیق پاسخ داده می‌شود.

در جواب به این که خلاقیت ریاضی چیست، با مروری بر ادبیات، تعاریف مختلفی می‌توان یافت. خلاقیت ریاضی نقش حیاتی در چرخه کاملی از تفکر ریاضی پیشرفته دارد و باعث حدسیه سازی در جهت توسعه، پیشبرد و خلق



شکل ۱ ارتباط بین روش‌های به دست آوردن مساحت دوزنقه و حجم هرم ناقص

علاوه بر تعمیم روش‌ها، می‌توان به تعمیم مفاهیم اشاره کرد؛ مثلاً دانش آموزی که قضیه تالس را برای دو بعد فرا گرفته است، بتواند برای سه بعد نیز تعمیم دهد.

همان طور که مطرح شد، حل مسئله در ریاضی به عنوان یک فعالیت خلاقانه ریاضی محسوب می‌شود. آموزش مفاهیم و موضوعات ریاضی از طریق حل مسئله، فرصتی برای درک عمیق از مفاهیم، موضوعات و ایده‌های مختلف ریاضی فراهم می‌کند و این امر سبب می‌گردد که دانش‌آموزان ضمن درگیر شدن در حل مسائل، به ارتباط و اتصال بین مفاهیم و موضوعات ریاضی بپردازند. بنابراین با توجه به اینکه حل مسئله به فراهم کردن شرایطی مناسب برای پرورش تفکر خلاق کمک می‌کند، لذا اتخاذ رویکرد حل مسئله گامی در جهت پرورش درک، بصیرت و توانایی تعمیم دادن می‌باشد.

با پرورش شهود و هدایت آن در جهت درست می‌توان بستری مناسب برای بروز خلاقیت و پرورش تفکر خلاق فراهم کرد؛ بنابراین تقویت و پرورش شهود از اهمیت خاصی برخوردار است. شاید بتوان گفت شهود در ریاضی، نوعی درک اولیه به حساب می‌آید و در بسیاری از مواقع همراه با خطاهای انسانی است؛ اما همین وجود خطاها عاملی مؤثر در پیشبرد تولید ایده‌های مهم ریاضی است.

نظریه‌های ریاضی می‌گردد؛ همچنین می‌توان توانایی تحلیل یک مسئله داده شده به شیوه‌های مختلف و انتخاب یک روش مناسب برای آوردن به وضعیت‌های نا آشنا در ریاضیات، در نظر گرفت. توانایی برای صورت‌بندی یک تعریف جدید و ارزشمند در ریاضی با استفاده از مفاهیم تعریف شده قبلی، مثالی از خلاقیت ریاضی است. خلاقیت در ریاضیات تنها مرتبط با کار اصیل و بکر ریاضیدانان نیست، بلکه کشف بعضی موارد از قبل شناخته شده توسط شخصی که این کشف برای او جدید است را نیز شامل می‌شود.

اینکه چگونه خلاقیت ریاضی توسعه پیدا می‌کند، می‌توان گفت خلاقیت ریاضی در خلأ نمی‌تواند رخ دهد، بلکه نیازمند بافتی است که در آن شخص به کمک تجارب پیشین خود آماده برداشتن گام‌های مهمی به سمت یک جهت جدید می‌شود. مراحل رشد خلاقیت ریاضی را می‌توان شامل سه مرحله مقدماتی، فعالیت الگوریتمی و فعالیت خلاقانه در نظر گرفت. مرحله‌ای مقدماتی- تکنیکی، شامل نوعی کاربرد عملی یا تکنیکی از قواعد و رویه‌های ریاضی، بدون آگاهی از بنیان‌های نظری آن می‌باشد. فعالیت‌های الگوریتمی ریاضی اساساً به اجرای تکنیک‌های ریاضی توجه دارند که در فرآیند خلق ریاضیات مورد نیازند. در این مرحله مفاهیم به صورت یک شیء در ذهن کپسوله شده و به هنگام نیاز از آن به عنوان ابزار استفاده می‌گردد. در مرحله فعالیت خلاقانه، خلاقیت ریاضی رخ می‌دهد و تصمیمی گرفته می‌شود؛ که متفاوت از فرایندهای الگوریتمی یا سیستمی ریاضی است و متکی بر تفکر الگوریتمی نبوده، بلکه فراتر از تفکر الگوریتمی می‌باشد.

در پاسخ به این که چه چیزی عملکرد خلاقانه در ریاضی محسوب می‌شود می‌توان گفت که خلاقیت ریاضی، شامل توانایی برای خلق اشیاء ریاضی همراه با کشف روابط متقابل‌شان است و می‌تواند شامل تغییر در سازماندهی ساختار یک نظریه ریاضی به منظور بهبود آن نیز باشد؛ همچنین خلاقیت ریاضی، توانایی برای حل مسئله و یا توسعه ساختارهای فکری با در نظر گرفتن ماهیت منطقی- استنتاجی ریاضی است.

در خصوص مراحل فرآیند یک فعالیت خلاقانه، می‌توان گفت اگرچه نمی‌توان نقش تصادف را در فرآیند خلاقانه

مورد تردید قرار داد، نسبت دادن آن به تصادف محض نیز صحیح نیست و شامل مراحل متعددی است. مدل والاس، یکی از مدل‌های حل مسئله خلاقانه، مدل چهار مرحله‌ای شامل مراحل آماده سازی، کمون، جرعه ذهنی و تأیید است. این مدل با تأکید بر ضرورت کار سخت و آگاهانه روی مسئله، بیان می‌کند که در صورت عدم کسب موفقیت در حل، شخص مسئله را رها کرده و به امور دیگری می‌پردازد؛ که شروع مرحله کمون است. در این مرحله، ناخودآگاه مسئله حل‌کن، بی‌صدا در حال فعالیت است. تا این که جرعه ذهنی زده شده و جواب متولد می‌گردد. در مرحله تأیید نتایج به زبان صوری و رسمی ریاضی بیان می‌گردد.

در خصوص ویژگی‌های فعالیت‌های خلاقانه در ریاضی، می‌توان گفت که خلاقیت اگرچه به دنبال نتایج مثبتی است اما؛ چون یک فعالیت انسانی است همیشه نتیجه مطلوب حاصل نمی‌شود و گاهی اوقات نیز با خطا همراه است. خطاپذیری یکی از ویژگی‌های فعالیت‌های خلاقانه ریاضی می‌باشد که باید مورد تقدیر قرار گیرد؛ زیرا همین وجود خطا است که باعث پیشروی‌های اساسی می‌شود. فعالیت‌های خلاقانه ریاضی می‌توانند از تعامل نیرو محرکه- های مختلفی از جمله درک، شهود، بصیرت و توانایی تعمیم دادن صورت پذیرند.

لذا در آموزش ریاضی باید با توجه به این ویژگی‌ها و نیرو محرکه‌ها، شرایط و بستری فراهم نمود تا یادگیری معنا دار (درک و بصیرت) از طریق برقراری ارتباطات و اتصالات بین مفاهیم و روش‌ها ایجاد شود و لذا مهارت تعمیم دادن پرورش یابد و فرصتی برای فراگیران فراهم گردد تا خلاقیت در ریاضی را نیز تجربه کنند و بتوانند مانند یک ریاضی‌دان تازه کار عمل کنند.

۵- نتیجه‌گیری

انسان از ابتدای تولد تشنه کاوش و یادگیری است و اگر زمینه و محیط مناسبی فراهم شود، می‌تواند به سوی خلاقیت و نوآوری هدایت گردد. خلاقیت و نوآوری نقشی مهمی در رشد و توسعه علم ایفا می‌کند و بررسی و تبیین آن از اهمیت خاصی برخوردار است. بنابراین از جمله اهداف هر نظام آموزشی باید پرورش انسان‌های خلاق باشد، تا قادر

را به طور گسترده در بین دانش‌آموزان و دانشجویان پرورش دهیم.

مؤلفه‌ای ضروری در نظام آموزشی‌مان در نظر بگیریم و آن را به طور گسترده در بین دانش‌آموزان و دانشجویان پرورش دهیم.

فعالیت‌های این حوزه وجود داشته و رشد و توسعه آن در برنامه درسی مدرسه‌ای و دانشگاهی قرار گیرد و فرصتی برای فراگیران فراهم گردد تا تفکر خلاق را در ریاضی هم تجربه کنند. به امید آنکه خلاقیت ریاضی را به عنوان مؤلفه‌ای ضروری در نظام آموزشی‌مان در نظر بگیریم و آن را به طور گسترده در بین دانش‌آموزان و دانشجویان پرورش دهیم.

باشند در شرایط غیر قابل پیش‌بینی، تصمیم‌های به جا و شایسته‌ای را بگیرند. خلاقیت یک ویژگی پویا از ذهن بشری است که می‌توان آن را بهبود و توسعه داد و یا با عدم توجه به آن، باعث سرکوبی آن شد.

با توجه به اینکه ریاضی حوزه‌ای است که در رأس حوزه‌های عقلانی قرار دارد [۳۶] و بستری مناسب برای پرورش مهارت‌هایی چون تعمیم دادن، مدل سازی، حدسیه سازی و حل مسئله می‌باشد؛ لذا خلاقیت باید در فعالیت‌های این حوزه وجود داشته و رشد و توسعه آن در برنامه درسی مدرسه‌ای و دانشگاهی قرار گیرد و فرصتی برای فراگیران فراهم گردد تا تفکر خلاق را در ریاضی هم تجربه کنند. به امید آن که خلاقیت ریاضی را به عنوان مؤلفه‌ای ضروری در نظام آموزشی‌مان در نظر بگیریم و آن را به طور گسترده در بین دانش‌آموزان و دانشجویان پرورش دهیم.

²⁶ Lakatos

²⁷ concept image

²⁸ formal definition

²⁹ Polya

³⁰ Kant

³¹ Wallas

^{۳۲} با توجه به این که حل مسئله به یک وضعیت نا شناخته اشاره می کند، حل مسئله در ریاضی به عنوان یک فعالیت خلاقانه ریاضی محسوب می‌شود.

³³ preparation

³⁴ incubation

³⁵ illumination

³⁶ verification

³⁷ Sio & Ormerod

³⁸ David Tall

³⁹ Ellwood

⁴⁰ Solving problem

⁴¹ problem solving

⁴² Vul & Pashler

⁴³ fatigue hypothesis

⁴⁴ unconscious work hypothesis

⁴⁵ forgetting fixation hypothesis

⁴⁶ Kim

⁴⁷ fallibility

^{۴۸} این حدس عبارت است از: هر خمینه سه بعدی با یک گروه بنیادی، همسان ریخت با کره سه بعدی است. برای مطالعه بیشتر و اثبات آن می‌توان به منبع [۳۸] مراجعه کرد.

⁴⁹ Grigory Perelman

⁵⁰ National Council of Teachers of Mathematics

پی نوشت

¹ Jacques Hadamard

² Christopher Columbus

³ Franklin

⁴ Toricelli

⁵ Mozart

⁶ Paul Valery

⁷ Albert Einstein

⁸ Bauer

⁹ Ervynck

¹⁰ Poincaré

¹¹ The Psychology of Invention in the Mathematical Field

¹² Mann

¹³ Laycock

¹⁴ Sriraman

¹⁵ Leikin

¹⁶ Preliminary technical stage

¹⁷ Algorithmic activity stage

¹⁸ Creative activity stage

^{۱۹} عبارت «کپسوله کردن» توسط پیازه به کار برده شده است. برای

مطالعه بیشتر به مرجع [۳۷] مراجعه شود.

^{۲۰} منظور از تولید دانش ریاضی همان خلق یک مفهوم جدید ریاضی و یا کشف روابط بین مفاهیم دیگر است.

²¹ Rickart

²² understanding

²³ intuition

²⁴ insight

²⁵ generalization

مراجع

- [15] Leikin R., *Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks*, in: Leikin R., Berman A. and Koichu B., (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, Rotterdam, the Netherlands, Sense Publisher, Vol.9, 2009, pp.129-145.
- [16] Rickart Ch., *Structuralism and Mathematical Thinking*, in: Sternberg R.J. and Ben-Zeev T., (Eds.), *the Nature of Mathematical Thinking*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, 1996, pp. 285-300.
- [17] اردشیر محمد، فرمرن و فلسفه ریاضی لاکاتوش، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۲۷، ۱۳۸۰، صفحه ۱ الی ۱۳.
- [18] Lakatos I.M., *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, 1976.
- [19] Sriraman B., *Mathematical giftedness, problem solving and the ability to formulate generalizations*, *The Journal of Secondary Gifted Education*, Vol.14, No.3, 2003, pp.151-165.
- [20] Polya G., *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*, New York, Wiley, 1962.
- [21] Wallas G., *The art of thought*, New York, Harcourt Brace, 1926.
- [22] گویا زهرا، رشد آموزش ریاضی، یادداشت سردبیر، شماره ۸۶، ۱۳۸۵.
- [23] Polya G., *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton, 1945.
- [24] Sio U.N. and Ormerod T.C., *Does Incubation Enhance Problem Solving? A Meta-Analytic Review*, *Psychological Bulletin*, Vol.135, No. 1, 2009, pp.94-120.
- [25] Ellwood S., Pallier G., Snyder A. and Gallate J., *the Incubation Effect: Hatching a Solution?* *Creativity Research Journal*, Vol.21, No.1, 2009, pp.6-14.
- [26] Vul E., and Pashler H., *Incubation benefits only after people have been misdirected*, *Memory and Cognition*, Vol.35, No.4, 2007, pp.701-710.
- [27] Kaufman J.C., Sternberg R.J., (Eds.), *the international handbook of creativity*, Cambridge, Cambridge University Press, 2006.
- [28] Chamorro-Premuzic T., *Creative Process*, in: Kerr B., (Ed.), *Encyclopedia of Giftedness, Creativity and Talent*, Sage Publications, 2009, pp.188-191.
- [1] Hadamard J., *the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, 1945.
- [۲] اعتماد شاپور، تحقیق و خلاقیت، نشر ریاضی، سال دو، شماره ۲، ۱۳۶۸.
- [3] Bryson B., *A Short History of Nearly Everything*, Doubleday, Australia, 2003.
- [4] Ervynck G., *Mathematical creativity*, in: Tall D., *Advanced mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers, New York, 1991, pp.42-52.
- [5] Tall D., *The psychology of advanced mathematical thinking*, in: Tall D., *Advanced mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers New York, 1991, pp.3-21.
- [6] Mann E.L., *Creativity: The essence of mathematics*, *Journal for the Education of the Gifted*, Vol.30, No.2, 2006, pp.236-260.
- [7] Sriraman B., *The characteristics of mathematical creativity*, *The International Journal on Mathematics Education [ZDM]*, Vol.41, 2009, pp.13-27.
- [8] Mann E.L., *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*, University of Connecticut, 2005.
- [9] Poincaré H., *Science and method*, New York, Dover, 1948.
- [10] Poincaré H., *Mathematical Creation*, in: Newman J.R., (ed.), *the world of mathematics*, New York, Simon and Schuster, Vol.4, 1956, pp.2041-2050.
- [11] Sriraman B., *Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms*, *The Journal of Secondary Gifted Education*, Vol.17, 2005, pp.20-36.
- [12] Noraini I. and Norjoharuddeen M.N., *Mathematical Creativity, Usage of Technology*, *Procedia- Social and behavioral Sciences*, (ISI/SCOPUS Cited Publication), 2010.
- [13] Shriki A., *Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts*, *Educational Studies in Mathematics*, 2010.
- [14] Liljedahl P. and Sriraman B., *Musings on mathematical creativity*, *For the Learning of Mathematics*, Vol.26, No.1, 2006, pp.20-23.

- [36] Silver E.A., *Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing*, in: ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 29, No.3, **1995**, pp.75–80.
- [37] Dubinsky E., *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*, in: Tall D., *Advanced mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers NewYork, **1991**, pp.95-123.
- [38] Thurston W.P., *Three dimensional manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry*, Bull Amer Math, Vol.6, No.3, **1982**, pp.357-381.
- [29] Christensen B.T., *Creative Cognition: Analogy and Incubation*, Department of Psychology, University of Aarhus, Denmark, **2005**.
- [30] Liljedahl P., *the AHA! Experience: mathematical contexts, pedagogical implications*, unpublished doctoral dissertation, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada, **2004**.
- [31] Kim K.H., *Creative Problem Solving*, in: Kerr B.,(Ed.), *Encyclopedia of Giftedness, Creativity and Talent*, Sage Publications, **2009**, pp.188-191.
- [32] Zhong C., Dijksterhuis A., and Galinsky A.D., *The merits of unconscious thought in creativity*, Psychological Science, Vol.19, **2008**, pp.912-918.
- [33] Seabrook R. and Dienes Z., *Incubation in problem solving as a context effect*, in: Alterman R. and Kirsh D., (Eds.), *Proceedings of the 25th annual meeting of the Cognitive Science Society*, Austin, TX: Cognitive Science Society, **2003**, pp.1065–1069.
- [34] Davidson J.E., *the Suddenness of Insight*, in: Sternberg R.J. and Davidson J.E., (Eds.), *the nature of insight*, Cambridge, MA: MIT Press, **1995**, pp.125–155.
- [35] National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: Author, **2000**.