

تعیین ضریب شدت تنش با قابلیت اطمینان بالا به وسیله تخمین

خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود

بهروز حسنی^۱، احمد گنجعلی^۲ و محسن امدادی^۲

چکیده: امروزه استفاده از روش های عددی به ویژه روش اجزای محدود، در حل مسائل متفاوت کاربرد فراوانی دارد. از آنجا که این روش ها تقریبی هستند، داشتن درکی واقعی از میزان و نحوه توزیع خطاها اهمیت بسیار زیادی دارد. از این رو آموزش کاربران نرم افزارهای تحلیل و طراحی مهندسی در این رابطه امری ضروری است و عدم توجه به آن می تواند فاجعه بار باشد. در این راستا بررسی مسأله تعیین ضریب شدت تنش صفحه ترک دار تحت کشش با روش اجزای محدود همراه با تخمین خطا و حل تطبیقی، موضوع این مقاله است. به این منظور برنامه ای کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شده است که قادر به تخمین خطای تحلیل اجزای محدود با استفاده از روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا می باشد. همچنین حل تطبیقی با تجدید المان بندی در هر مرحله، جهت بهبود شبکه ای اجزای محدود صورت می پذیرد. با مقایسه نتایج به دست آمده با تحلیل تئوری و همچنین نرم افزار تجاری ANSYS، مشاهده می شود که الگوریتم مورد استفاده جهت برآورد خطای حل اجزای محدود در این پژوهش کارایی مناسب تری دارد و می تواند برای تعیین ضریب شدت تنش در سازه های پیچیده با ترک های دلخواه به کار رود.

کلمات کلیدی: ضریب شدت تنش، تخمین خطا، حل تطبیقی

۱- مقدمه

با توجه به استفاده بسیار وسیع از این روش در نرم افزارهای تجاری تحلیل و طراحی مهندسی و نظر به اینکه عدم توجه به تقریبی بودن آن می تواند منجر به نتایج کاملاً اشتباه و بعضاً فاجع بار گردد، پرداختن به موضوع مهم بررسی خطاها و گنجاندن مباحث برآورد خطا و حل تطبیقی در سر فصل دروس دانشگاهی و نیز دوره های آموزشی از اهمیت بسیار زیادی برخوردار می باشد که متأسفانه از آن غفلت شده است. ریشه های توسعه این روش را باید در اوایل دهه ۱۹۴۰ میلادی جست و جو کرد. روش های اجزای محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال ۱۹۵۷ دارد. در سال ۱۹۶۰، کلاف نام اجزای محدود را بر این روش نهاد. کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پارهای در سال ۱۹۶۵ توسط زینکویچ و چونگ پیشنهاد شد [۱].

از همان آغاز مدل سازی رخدادهای فیزیکی توسط کامپیوتر و شکل گیری مبانی اجزای محدود، وجود خطاهای عددی

هم گام با رشد علوم و فناوری، مسائل مهندسی نیز روز به روز پیچیده تر می شوند. با پیچیده تر شدن مسائل و لزوم حل سریع تر و دقیق تر آن ها، روش های تحلیلی، دیگر جواب گوی نیازهای روز افزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره سعی می کنند در کنار توسعه مبانی علوم، روش های عددی را نیز توسعه بخشند.

روش اجزای محدود، یکی از روش هایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته های مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد و در چند دهه گذشته به عنوان یکی از دروس دانشگاهی در بسیاری از رشته های مهندسی آموزش داده می شود.

تاریخ دریافت مقاله ۸۷/۱۰/۱۳ و تاریخ تصویب نهایی ۸۷/۱۲/۱۹

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه صنعتی شاهرود (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی: b_hassani@iust.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

هر جای دیگر از دامنه مورد نظر باشد، باید از روش‌های بازیافت تنش استفاده نمود؛ زیرا اگر المان‌های به کار گرفته شده، از درجات پایین، مانند C^0 باشد، تنها تابع جابه‌جایی در نقاط گرهی و مرز المان‌ها پیوسته بوده و تنش یا گرادیان میدان در آن نقاط گسسته و همراه با پرش می‌باشد. از اینجا می‌توان به اهمیت بحث بازیافت تنش پی برد. زیرا قاعدتاً باید فقط یک مقدار مشخص، نزدیک به حل دقیق، برای مشتق اول یا تنش در هر گره موجود باشد که به دست آوردن این مقدار، با استفاده از عملیات تکمیلی بازیافت تنش بر روی نتایج حاصل از حل روش اجزای محدود مقدور می‌باشد، و خود شامل روش‌های مختلفی است.

به طور کلی می‌توان گفت که بازیافت تنش، روشی است که هدف از آن بالا بردن دقت، و هموار نمودن میدان تنش (با گرادیان میدان جابه‌جایی) به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش، با استفاده از حل اجزای محدود، تابع مورد نظر را در نقاط خاصی که دقت بالاتری نسبت به سایر نقاط و گره‌ها دارند به دست آورده و از آن‌ها در به دست آوردن مقادیر بهبود یافته استفاده می‌کنیم.

لازم به یادآوری است که با به دست آوردن مقادیر بهبود یافته تنش در نقاط خاص مذکور در بالا، به راحتی می‌توان تنش بهبود یافته در هر نقطه دیگر، و به ویژه نقاط گرهی را به وسیله‌ی درون‌یابی با استفاده از توابع شکل المان‌ها به صورت زیر به دست آورد [۶]:

$$\sigma^* = N\bar{\sigma} \quad (1)$$

که در آن $\bar{\sigma}^*$ مقادیر مربوط به نقاط با دقت بالاتر و N توابع شکل مورد استفاده در المان‌ها است. با استفاده از این میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{\sigma}^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (2)$$

که در رابطه‌ی بالا σ_h تنش ناشی از تحلیل متعارف اجزای محدود می‌باشد. روش‌های متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد که از آن میان می‌توان به روش میانگین‌گیری، روش تصویر L_2 و روش استفاده از نقاط فوق همگرا اشاره کرد. در ادامه تنها به بیان و تشریح روش معروف بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا که در این پژوهش از آن استفاده شده است، پرداخته می‌شود.

در محاسبات، منشأ اصلی نگرانی بوده است. از اولین مقاله‌هایی که در آن مسأله تخمین خطا مطرح گردید، می‌توان به مقاله‌هایی که توسط ریچاردسون در سال ۱۹۱۰ نوشته شده اشاره کرد. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا و رینبولت آغاز شد. روش آن‌ها بر این اساس بود، که باقی‌مانده را در یک گروه از المان‌ها و یا یک المان تنها مورد بررسی قرار می‌دادند و به کمک آن می‌توانستند خطا را تخمین بزنند [۲]. در سال ۱۹۸۷ زینکوویچ و زو روشی برای برآورد خطا بر اساس بازیافت تنش‌ها پیشنهاد کردند [۳].

همین محققین در همان سال روش ساده‌ای برای تخمین خطای کلی و محلی در حل المان‌های محدود و شکلی ساده از آنالیز تطبیقی به روش h را ارائه کردند [۳]. در ادامه، این دو محقق در سال ۱۹۹۲ روش SPR^۱ را در برآورد خطای حل المان‌های محدود و آنالیز تطبیقی، طی دو مقاله معروف، معرفی کردند [۴ و ۵].

تحقیق حاضر سعی کرده است تا خواننده را با اصول روش تخمین خطا، به ویژه روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا (SPR) آشنا سازد و همچنین چگونگی حل تطبیقی در روش اجزای محدود را بیان کند و در نهایت با ارائه یک روش با قابلیت اطمینان بالا و دقت کنترل شده به تعیین ضریب شدت تنش صفحه‌ی ترک‌دار تحت کشش بپردازد. به این منظور برنامه‌ای کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شده است که قادر به تخمین خطای تحلیل اجزای محدود با استفاده از روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا (SPR) می‌باشد. همچنین حل تطبیقی با تجدید المان‌بندی در هر مرحله با استفاده از روش تولید شبکه‌ی جبهه‌ی پیشرونده^۲ جهت بهبود شبکه‌ی اجزای محدود صورت می‌پذیرد. برای بررسی کارایی برنامه و دقت حل، نتایج به دست آمده با نتایج تئوری و همچنین نتایج حاصله از نرم افزار ANSYS مقایسه شده است.

۲- روش‌های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش

پس از حل معادله‌ی دیفرانسیل الاستیسیته توسط روش اجزای محدود و به دست آوردن مقادیر جابه‌جایی در هر گره، در صورتی که به دست آوردن مقادیر دقیق تنش (گرادیان میدان جابه‌جایی) در گره‌ها، روی مرز المان‌ها و یا

بهبود تنش در هر ناحیه و n تعداد المان‌های موجود در هر ناحیه است.

۴- معیارهای بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به روش اجزای محدود به دست آمده است. بنابراین خطای حل تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \quad (8)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ میدان تنش دقیق است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد، که این میدان تنش جدید توسط یکی از روش‌های باز یافت تنش به دست آمده است. بنابراین خطای تقریبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{\mathbf{e}}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h \quad (9)$$

رابطه‌ی اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند، ضمن این که این مقدار، در مورد هر یک از مولفه‌ها، ممکن است از نظر عددی کوچک‌تر از صفر باشد. بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری جهت بیان آن استفاده می‌شود. یکی از مهم‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی^۵ می‌باشد که در ادامه به تشریح آن پرداخته می‌شود.

۴-۱ معیار خطای انرژی

طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}$ مقدار دقیق بردار تنش، $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به دست آمده از حل تقریبی، \mathbf{D} ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه‌ی المان می‌باشد. با توجه به این که در حالت کلی، جز در مواردی خاص که در حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسأله در دسترس نمی‌باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته‌ی آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت

۳- روش باز یافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا

این روش باز یافت تنش (SPR) در سال ۱۹۹۲ توسط زینکویچ و زو ابداع شد که گام بسیار بلندی در باز یافت تنش محسوب می‌شود [۴]. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و مؤثرترین روش‌ها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به کار می‌رود. اساس این روش بر مبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق همگرا در المان‌ها است. این نقاط تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد و همگرایی گرادیان تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است [۶].

در المان‌های اجزای محدود، نقاط گوسی دارای مشخصه‌ی مذکور هستند. در روش SPR با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المان‌های متصل به هر گره^۴، میدان گرادیان بهبود یافته، تعیین می‌شود. این میدان به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma}_p^* = \mathbf{P}\mathbf{a} \quad (3)$$

در رابطه‌ی فوق $\boldsymbol{\sigma}_p^*$ ، تنش بهبود یافته، \mathbf{P} مجموعه‌ی تک جمله‌ای‌های حداکثر هم درجه با توابع شکل المان و \mathbf{a} مقادیر ثابت مجهول هستند. با کمینه کردن تابع ۴ مقادیر مجهول مطابق رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید [۶].

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) - \boldsymbol{\sigma}_p^*(x_i, y_i))^2 = \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) - \mathbf{P}(x_i, y_i)\mathbf{a})^2$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (5)$$

در رابطه‌ی ۵، \mathbf{A} و \mathbf{b} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\mathbf{P}(x_i, y_i) \quad (6)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) \quad (7)$$

در این روابط، $\boldsymbol{\sigma}_h$ تنش به دست آمده از روش اجزای محدود، x_i و y_i مختصات نقاط فوق همگرا یا نقاط

زیر تعریف می‌شود:

$$\|e\| = \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \bar{\sigma})^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \bar{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

که در اینجا σ^* تنش بازیافتی و $\bar{\sigma}$ تنش به دست آمده از تحلیل اجزای محدود می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

۵- درصد خطای نسبی

بیان خطا به صورت مقدار مطلق، عملاً شاخص مناسبی برای درک آن نمی‌باشد و لذا معمولاً خطا به صورت نسبی از مقدار کل بیان می‌شود. درصد خطای نسبی نرم انرژی را رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|U\|} \times 100 \% \quad (12)$$

از طرفی همان طور که قبلاً بحث شد، میدان تنش، کرنش و یا جابه‌جایی به طور دقیق در دست نیست، پس در محاسبه معیار خطا بایستی از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد:

$$\|e\| \approx \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

در نتیجه درصد خطای نسبی نیز به صورت تقریبی و با توجه به حل اصلاح شده بیان می‌شود:

$$\bar{\eta} = \frac{\|\bar{e}\|}{\|\bar{u}\|} \quad (14)$$

که در رابطه‌ی فوق $\|\bar{u}\|$ و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|\bar{u}\| = \left[\|u^*\|^2 + \|\bar{e}\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$\|u^*\| = \left[\int_{\Omega} \sigma^{*T} \mathbf{D}^{-1} \sigma^* d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

چنانچه خطای نسبی قابل قبول در یک مسأله را η بنامیم، بنابراین شرط یک حل قابل قبول توسط روش اجزای محدود این است که:

$$\eta \leq \eta \quad (17)$$

مقدار η معمولاً در کارهای عملی کمتر از ۵ درصد در نظر گرفته می‌شود [۶].

۶- تعریف شاخص $\bar{\eta}_i$

همان طور که در بخش ۵ بیان شد، با محاسبه η و مقایسه‌ی آن با η می‌توان به قابل قبول بودن خطای اتفاق افتاده در تحلیل به روش اجزای محدود برای محیط جزء بندی شده پی برد. به طوری که اگر $\eta < \hat{\eta}$ باشد، خطاهای اتفاق افتاده قابل قبول بوده و چنانچه $\eta > \hat{\eta}$ باشد، خطای اتفاق افتاده بیش از مقدار مجاز بوده و برای رسیدن به جواب قابل قبول باید شبکه‌ی جزءبندی شده اصلاح گردد. اما سؤالی که در اینجا مطرح است، این است که شبکه‌ی جزءبندی شده چگونه باید اصلاح شود [۶].

برای اصلاح شبکه جزءبندی شده اولین راه حلی که به نظر می‌رسد کوچک‌تر نمودن کلیه‌ی المان‌ها تا حصول $\eta < \eta$ می‌باشد. اما راه حل فوق یک راه حل اقتصادی نیست و موجب می‌شود که حجم مسأله بسیار بزرگ شده و حل آن نیازمند نرم افزارهایی با ظرفیت بالا باشد. راه حلی که به نظر می‌آید از کارایی بیشتری برخوردار بوده و موجب کمترین افزایش حجم مسأله می‌گردد، کوچک‌تر نمودن موضعی مسأله می‌باشد. یعنی در جاهایی که خطا بیش از خطای مجاز است، عملیات اصلاحی اعمال شود و در جاهایی که خطای اتفاق افتاده کمتر از خطای مجاز است، دست نخورده باقی بماند. در روش اخیر نیازمند ابزار یا پارامتری هستیم، که بتوان به کمک آن خطای موضعی کلیه اجزا را محاسبه نمود. این پارامتر به $\bar{\eta}_i$ معروف است که در ادامه به نحوه‌ی محاسبه‌ی آن برای هر جزء محدود می‌پردازیم.

برای آن که معیاری داشته باشیم تا بتوانیم بگوییم که در کجاها خطا بیشتر است، شاخص $\bar{\eta}_i$ را برای تک تک اجزا به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به منظور تعمیم خطای نسبی نرم‌ها برای تک تک اجزا مطابق تعریف بابوشکا فرض

یکنواخت روی کل ناحیه توزیع شده باشد. این تعریف اولین بار در مورد مسائل یک بعدی صورت گرفت [۳ و ۸]. و در حال حاضر این تعریف در همه روش‌های آنالیز تطبیقی استفاده می‌شود. روش‌های مختلفی برای حل تطبیقی در اجزای محدود وجود دارد. در زیر دو نوع گروه کلی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند معرفی می‌شوند [۶].

۱- **روش اصلاح شبکه h** : در این روش از المان‌ها با مرتبه یکسان استفاده می‌شود، و برای دستیابی به نتایج مطلوب، اندازه‌ی المان‌ها تغییر می‌کند.

۲- **روش اصلاح شبکه P** : در این روش ما از المان‌هایی با اندازه یکسان استفاده می‌کنیم و با افزایش مرتبه‌ی المان‌هایی که دارای خطایی بیشتر از معیار تعیین شده هستند به بهبود شبکه و کاهش خطای ناشی از حل اجزای محدود می‌پردازیم.

با توجه به این که بهبود شبکه‌ی مورد استفاده در این پژوهش به روش اصلاح شبکه h می‌باشد در ادامه به تشریح این روش پرداخته می‌شود.

۷-۱ انواع روش‌های اصلاح شبکه h

۱- **روش تقسیم المان‌ها (غنی سازی)**:^۹ در این روش هر المان که دارای خطایی بیشتر از معیار تعیین شده است به دو بخش تقسیم می‌شود.

۲- **اصلاح شبکه به روش r** :^{۱۰} در این روش تعداد کل گره‌های تولید شده از مش‌بندی مسأله ثابت باقی می‌ماند و برای رسیدن به بهترین تقریب، موقعیت گره‌ها در روی دامنه تغییر می‌کند.

۳- **روش تولید کامل المان‌ها (المان‌بندی دوباره)**:^{۱۱} در این روش بر روی کل دامنه مورد استفاده برای حل اجزای محدود، المان‌هایی با اندازه جدید تولید می‌شود و برای بهبود دوباره‌ی شبکه، کل المان‌های اولیه پاک می‌شوند و دامنه دوباره المان بندی می‌شود. این روش تا حدودی گران و غیر اقتصادی می‌باشد. مخصوصاً در مسائل سه بعدی که تولید مش برای بعضی از

می‌شود که درصد خطا به طور یکنواخت بین کلیه اجزاء توزیع شده است [۶]. پس خواهیم داشت:

$$\|e^*\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_i^*\|^2 \quad (18)$$

$$\|e^*\|^2 = m \cdot \|e_i^*\|^2 \quad (19)$$

که در آن m تعداد اجزا در کل ناحیه Ω می‌باشد.

$$\eta = \left[\frac{\|e^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{m \cdot \|e_i^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

چنانچه خطای مجاز را با $\|e_{per}^*\|$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\eta = \eta \Rightarrow \|e_i^*\| = \|e_{per}^*\| \quad (21)$$

$$\eta^2 = \frac{m \|e_{per}^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \quad (22)$$

$$\|e_{per}^*\| = \frac{\eta}{\sqrt{m}} \left[\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

طبق تعریف شاخص ξ_i عبارت خواهد بود با:

$$\xi_i = \frac{\|e_i^*\|}{\|e_{per}^*\|} \quad (24)$$

بنابراین به عنوان یک معیار چنانچه $\xi_i < 1$ باشد، خطای جزء مورد نظر (A_m) مورد قبول بوده و چنانچه $\xi_i > 1$ باشد، خطای جزء فوق بیش از مقدار مجاز خواهد بود.

۷-۲ حل تطبیقی در اجزای محدود

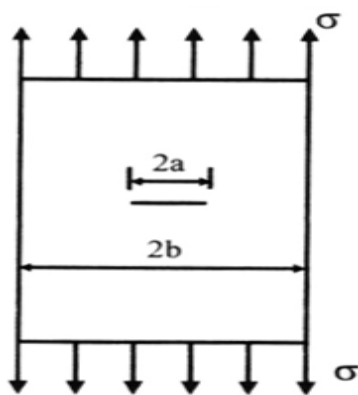
یکی از اهداف مهم روش آنالیز تطبیقی پیدا کردن شبکه‌ی المان بهینه است. منظور از شبکه‌ی المان بهینه شبکه‌ای است که با تعداد المان‌های ثابت، حداقل خطای حل به روش اجزای محدود را داشته باشد. اولین تلاش برای رسیدن به شبکه‌ی المان بهینه توسط نایس و مارکال^۶ در سال ۱۹۷۴ صورت گرفت [۷]. در این روش موقعیت گره‌ها به صورت نامعلوم در نظر گرفته می‌شود و سپس با استفاده از حداقل نمودن انرژی پتانسیل می‌توان موقعیت گره‌ها را تعیین نمود. در روش‌های آنالیز تطبیقی، شبکه‌ی المانی‌ای بهینه است که در آن معیار خطای انرژی به صورت

الگوریتم به کار رفته در برنامه قادر است که بعد از تخمین خطای اجزای محدود، چگالی مش مورد نیاز را در نواحی مختلف ناحیه تعیین کند و بر اساس آن حل تطبیقی انجام پذیرد.

۹- ضریب شدت تنش

مکانیک شکست ارتجاعی خطی، روشی برای بیان میدان و توزیع تنش در نزدیکی نوک ترک بر حسب بارگذاری در دور دست، اندازه و شکل هندسی ترک یا ناپیوستگی ترک گونه می‌باشد. مهم‌ترین اصل مکانیک شکست ارتجاعی خطی این است که توزیع تنش نزدیک یک ترک نوک تیز بر حسب یک کمیت به نام ضریب شدت تنش K_I ، (با واحد $\text{Mpa}\sqrt{m}$) قابل بیان است که به هر دو عامل، تنش وارده به قطعه در دور دست (σ) و هندسه قطعه (شامل طول ترک)، بستگی دارد. توسط ضریب شدت تنش می‌توان تنش موضعی در نوک ترک را به تنش دور دست (مانند تنش اعمال شده به قطعه) مرتبط کرد [۹]. اگر صفحه‌ای به عرض نامحدود که تحت بار کششی یکنواخت در دور دست قرار گرفته و دارای ترکی به طول $2a$ در وسط است، مورد نظر قرار گیرد (شکل ۲) که در آن $2b$ بسیار بزرگ‌تر از طول ترک در نظر گرفته می‌شود، مقدار ضریب شدت تنش (K_I) به صورت زیر بیان می‌شود [۹]:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \sqrt{2\pi r} \quad (25)$$



شکل ۲ صفحه با عرض نامحدود دارای ترک مرکزی

المان‌ها مشکل می‌باشد. مشکل بعدی که در این روش وجود دارد، انتقال نتایج و داده‌های ناشی از مش‌های اولیه به مش‌های ثانویه می‌باشد. با وجود این، نتایج به دست آمده از این روش، بسیار عالی بوده است و برای مسائل کاربردی-مهندسی زیادی، مخصوصاً مسائلی که شکل المان‌ها در طول آنالیز تغییر می‌کند، بهترین روش برای حل تطبیقی به شمار می‌رود [۶]. در این پژوهش از این روش در بهبود شبکه اجزای محدود استفاده شده است.

۸- تولید شبکه‌ی اجزای محدود

مش بندی و تولید المان‌ها یکی از مراحل مهم در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای با روش اجزای محدود در مسائل مکانیک جامدات است.

تولید مش به مفهوم تقسیم بندی و جایگزینی شکل هندسی اولیه با قطعات ساده‌تر و کوچک‌تر می‌باشد. برای حل مسائل سازه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود، ابتدا بایستی مدل هندسی اولیه به یک مدل محاسباتی تبدیل شود. بدین منظور مهم‌ترین بخش کار، تولید مش می‌باشد.

در این پژوهش، تولید شبکه اجزای محدود به صورت اتوماتیک و با استفاده از المان‌های مثلثی شش‌گوشی و چهارضلعی هشت‌گوشی ایزوپارامتریک نشان داده شده در شکل ۱ انجام می‌گیرد. این شبکه، به صورت ساختار نیافته^{۱۲} و به روش جبهه‌ی پیش‌رونده^{۱۳} تشکیل می‌شود. روش‌های تولید مش سازمان نیافته، روش‌هایی هستند که برای هر گره و المان موجود در داخل دامنه، تعداد گره‌ها و المان‌های موجود در همسایگی آن‌ها ثابت نمی‌باشد و تولید آن‌ها به طور همزمان صورت می‌پذیرد. لازم به ذکر است که بهبود محلی شبکه اجزای محدود تنها به کمک این نوع روش مش‌بندی امکان پذیر است.



شکل ۱ المان‌های مورد استفاده جهت شبکه بندی دامنه

در صورتی که عرض ورق محدود و برابر $2b$ در نظر گرفته شود، ضریب تصحیحی باید در نظر گرفته شود تا بتوان اثر تنش‌های لبه‌ی نمونه در توزیع تنش نوک ترک را در رابطه ضریب شدت تنش وارد نمود. در این حالت ضریب شدت تنش خواهد بود [۹]:

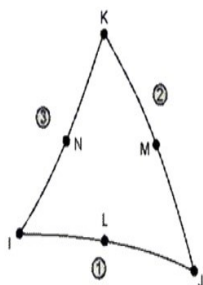
$$K_I = 100\sqrt{\pi \times 0.02} \left(\frac{2 \times 0.2}{\pi \times 0.02} \tan \frac{\pi \times 0.02}{2 \times 0.2} \right)^{\frac{1}{2}} = 25.17 \text{ MPa.m}^{\frac{1}{2}}$$

۱۱- نتایج

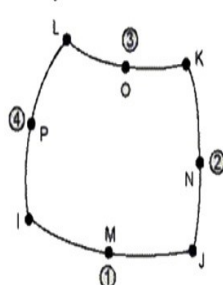
در این قسمت به بیان نتایج برگرفته از مدل‌سازی مسأله صفحه ترکدار تحت کشش با المان‌های مثلثی شش‌گوشی و مربعی هشت‌گوشی پرداخته می‌شود. در هر مورد شبکه اولیه اجزای محدود و شبکه نهایی به دست آمده از حل تطبیقی به همراه درصد خطای نسبی آن‌ها نشان داده شده است. همچنین توسط برازش خط به ضریب‌های شدت تنش به دست آمده از شبکه نهایی، ضریب شدت تنش در نوک ترک ($r=0$) حاصل شده است.

جهت بررسی کارایی و صحت نتایج به دست آمده از برنامه، به تعیین ضریب شدت تنش با استفاده از نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS (ver 11) پرداخته شده است. مدل‌سازی مسأله در برنامه ANSYS با استفاده از دو المان مشابه با المان‌های مورد استفاده در این پژوهش صورت پذیرفته است. المان مثلثی شش‌گوشی PLANE2 و المان چهار ضلعی هشت‌گوشی PLANE82 که در شکل ۴ مشخصات هندسی مربوط به هر یک مشاهده می‌شوند [۱۱].

PLANE2 Geometry



PLANE82 Geometry



شکل ۴ المان‌های مورد استفاده در شبکه بندی به کمک نرم افزار ANSYS

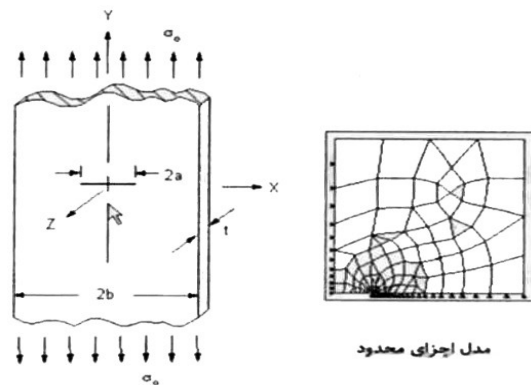
نحوه محاسبه‌ی ضریب شدت تنش بر اساس نتایج تحلیل اجزای محدود دوبعدی بدین صورت است که با توجه به رابطه‌ی ۲۵، با معلوم بودن σ_y ضریب، ضریب شدت تنش را می‌توان با برون‌یابی منحنی تغییرات K_I بر حسب r در نقطه $r=0$ محاسبه نمود [۹].

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

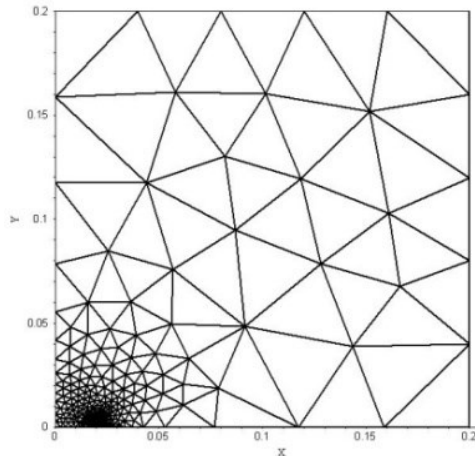
نحوه محاسبه‌ی ضریب شدت تنش بر اساس نتایج تحلیل اجزای محدود دوبعدی بدین صورت است که با توجه به رابطه‌ی ۲۵، با معلوم بودن σ_y ضریب، ضریب شدت تنش را می‌توان با برون‌یابی منحنی تغییرات K_I بر حسب r در نقطه $r=0$ محاسبه نمود [۹].

۱۰- تعریف مسأله

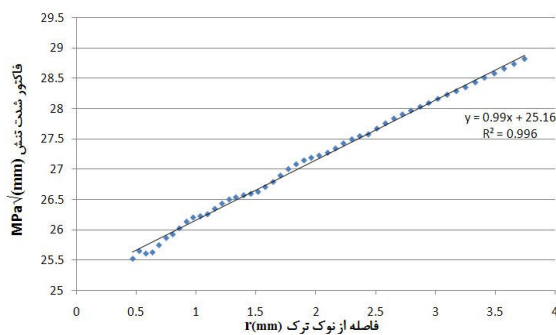
صفحه محدودی با ترکی در قسمت میانی تحت کشش قرار دارد. صفحه از جنس فولاد، با مدول یانگ $E=200 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون $\nu=0/3$ است. عرض صفحه $2b=0/4 \text{ m}$ و عرض ترک در قسمت میانی صفحه $2a=0/04 \text{ m}$ می‌باشد. نیروها به صورت لبه‌ای و گسترده در وجه بالا و پایین نمونه، به مدل اعمال می‌گردند. نیروی گسترده اعمالی به مقدار 100×10^6 نیوتن بر متر بوده که با توجه به واحد بودن عرض نمونه، موجب تنشی برابر 100 MPa در لبه‌های مدل خواهد گردید. در این مسأله شکست را الاستیک خطی فرض می‌کنیم و صفحه را دارای کرنش صفحه‌ای در نظر می‌گیریم. به دلیل تقارن مدل، فقط $1/4$ از مدل مورد آنالیز قرار می‌گیرد (شکل ۳).



شکل ۳ صفحه با ترک میانی [۱۰]



شکل ۶ شبکه نهایی المان مثلثی شش گرهی
(تعداد گره‌ها، ۷۳۳=تعداد المان‌ها، درصد
 $\eta = 0.42$ با ۳۱۳۶ درجه‌ی آزادی)



شکل ۷ برازش خط به ضریب‌های شدت تنش محاسبه
شده از المان‌های مثلثی شش گرهی

۱۱-۲ نتایج ناشی از مدل‌سازی با المان چهار ضلعی هشت گرهی

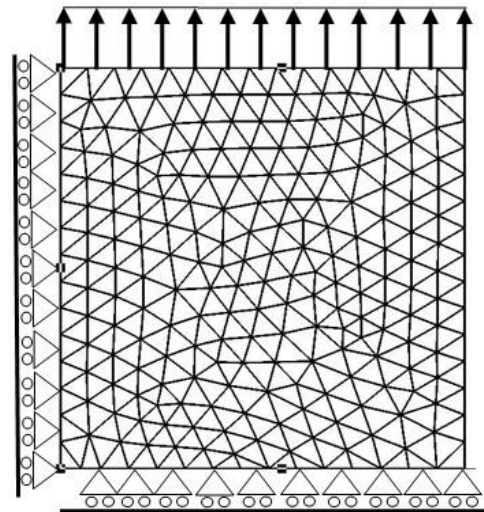
در این قسمت نیز همانند بخش قبل، به بیان نتایج به دست آمده با شبکه‌بندی دامنه با المان‌های چهار ضلعی هشت گرهی می‌پردازیم. همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، در شبکه‌بندی نهایی با المان‌های چهار ضلعی هشت گرهی نسبت به شبکه نهایی المان‌های مثلثی شش گرهی علاوه بر کاهش تعداد المان‌ها از ۷۳۳ المان مثلثی به ۵۵۵ المان چهار ضلعی، درصد خطای نسبی نیز از ۰/۲۴ درصد به ۰/۲۱ درصد کاهش یافته است که این افزایش دقت به دلیل افزایش جملات توابع شکل در المان چهار ضلعی هشت

۱۱-۱ نتایج ناشی از مدل‌سازی با المان مثلثی شش گرهی

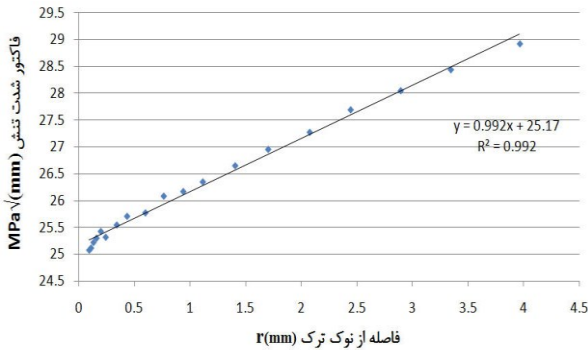
در شکل ۵ می‌توان شبکه بندی اولیه، بارگذاری و شرایط تکیه گاهی به وجود آمده از جدا شدن ۱/۴ دامنه از کل آن را مشاهده کرد. نتایج نشان می‌دهد که برای شبکه‌بندی اولیه با ۴۲۸ المان مثلثی شش گرهی، درصد خطای نسبی ۳/۷۷٪ می‌باشد.

در شکل ۶ شبکه‌بندی نهایی مشاهده می‌شود. در شبکه نهایی با ۷۳۳ المان مثلثی شش گرهی به درصد خطای نسبی ۰/۲۲٪ رسیده‌ایم. یعنی با افزایش المان‌ها به کمتر از دو برابر، به کاهش خطایی حدود ۱۷ برابر می‌رسیم.

شکل ۷ برازش خط به ضریب‌های تنش به دست آمده از مدل‌سازی مسأله با المان‌های مثلثی شش گرهی را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که مقادیر ضریب شدت تنش به دست آمده از برون‌یابی تنش‌ها و آنالیز تئوری با یکدیگر تطابق قابل قبولی نشان می‌دهند. مقدار ضریب شدت تنش از روش برون‌یابی مؤلفه تنش σ_y ناشی از حل تطبیقی اجزای محدود عددی حدود $(25/16 MPa(m))^{1/2}$ می‌باشد؛ در حالی که ضریب شدت تنش به دست آمده از آنالیز تئوری $(25/17 MPa(m))^{1/2}$ می‌باشد.



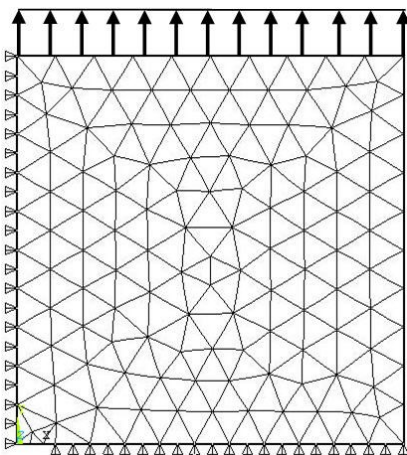
شکل ۵ شبکه اولیه المان مثلثی شش گرهی
(تعداد گره‌ها، ۴۲۸=تعداد المان‌ها، درصد $\eta = 3.77$
با ۱۸۳۴ درجه‌ی آزادی)



شکل ۱۰ برازش خط به ضریب های شدت تنش محاسبه شده از المان های چهار ضلعی هشت گرهی

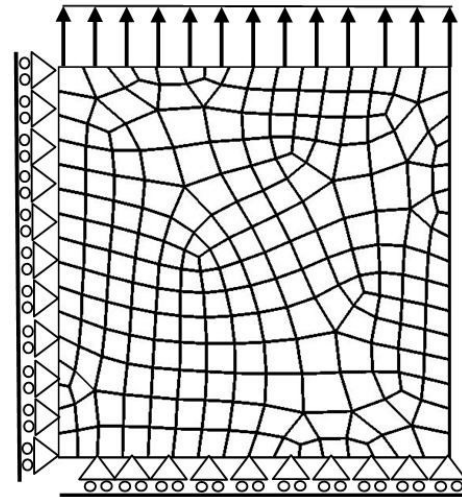
۳-۱۱ نتایج ناشی از مدل سازی با المان مثلثی شش گرهی PLANE2

در شکل ۱۱ شبکه اولیه‌ی حاصل از المان مثلثی شش گرهی PLANE2 نرم افزار ANSYS مشاهده می‌شود. درصد خطای نسبی شبکه‌ی اولیه‌ی المان مثلثی شش گرهی برنامه عدد ۳/۷۷ درصد می‌باشد در صورتی که در المان PLANE2 عدد ۷/۲۹ درصد است که این امر به دلیل افزایش تعداد گره‌های المان مثلثی شش گرهی برنامه نسبت به المان PLANE2 در شبکه‌ی اولیه قابل توجیه است.

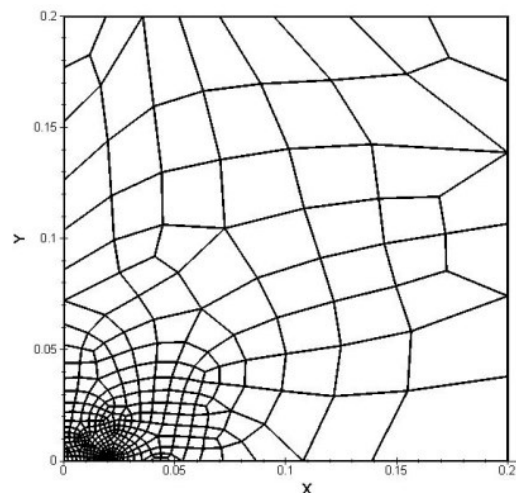


شکل ۱۱ شبکه اولیه‌ی المان PLANE2 (۵۲۶=تعداد گره‌ها، ۲۴۱=تعداد المان‌ها، درصد $\eta = 7/29$ با ۱۰۵۲ درجه‌ی آزادی)

گره‌ی می‌باشد. همان طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود با برازش خط به ضریب‌های شدت تنش محاسبه شده از المان‌های چهار ضلعی هشت گرهی عدد ۲۵/۱۷ برای ضریب شدت تنش در نوک ترک به دست می‌آید که کاملاً با نتیجه‌ی تئوری آن منطبق می‌باشد.



شکل ۸ شبکه اولیه المان چهار ضلعی هشت گرهی (۷۱۳=تعداد گره‌ها، ۲۱۶=تعداد المان‌ها، درصد $\eta = 4/69$ با ۱۴۲۸ درجه‌ی آزادی)

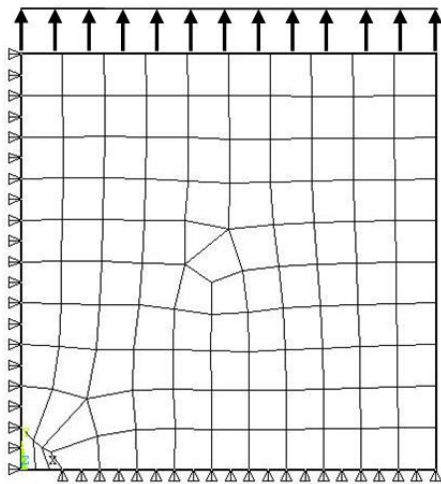


شکل ۹ شبکه نهایی المان چهار ضلعی هشت گرهی (۱۷۵۸=تعداد گره‌ها، ۵۵۵=تعداد المان‌ها، درصد $\eta = 0/21$ با ۳۵۱۶ درجه‌ی آزادی)

۴-۱۱ نتایج ناشی از مدل‌سازی با المان چهار ضلعی

هشت گرهی PLANE82

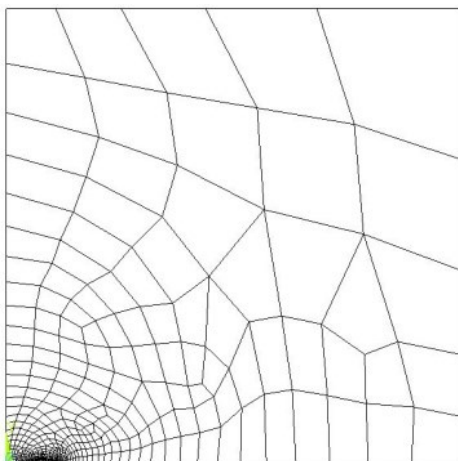
در این بخش به ارائه نتایج حاصل از المان PLANE82 نرم افزار ANSYS پرداخته شده است. شکل‌های ۱۴ و ۱۵ به ترتیب نشان دهنده‌ی شبکه‌ی اولیه و نهایی و شکل ۱۶ نحوه‌ی برازش خط به فاکتورهای شدت تنش با المان چهار ضلعی هشت گرهی PLANE82 را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود مقدار فاکتور شدت تنش در نوک ترک مشابه با المان PLANE2، ۲۵/۳۳ به دست آمده است.



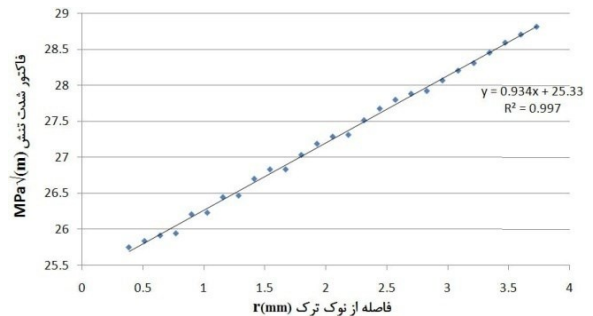
شکل ۱۲ شبکه نهایی المان PLANE2 (تعداد=۱۵۸۸ گره‌ها، تعداد المان‌ها، درصد $\eta = ۰/۵۹$ با ۳۱۷۶ درجه‌ی آزادی)

در شکل ۱۲ شبکه نهایی حاصل از المان PLANE2 نرم افزار ANSYS مشاهده می‌شود. با وجود کاهش تعداد المان‌ها در این شکل نسبت به شبکه نهایی حاصل از المان مثلثی شش گرهی برنامه، (شکل ۶) تعداد گره‌ها در این شبکه افزایش یافته است. این امر به دلیل تمرکز بیشتر المان‌ها حول نقاط گرهی در شبکه‌ی نهایی با المان مثلثی برنامه نسبت به شبکه‌ی نهایی المان PLANE2 می‌باشد.

شکل ۱۴ شبکه اولیه المان PLANE82 (تعداد=۳۷۰ گره‌ها، تعداد المان‌ها، درصد $\eta = ۹/۴۶$ با ۷۴۰ درجه‌ی آزادی)



شکل ۱۵ شبکه نهایی المان PLANE82 (تعداد=۳۲۶۲ گره‌ها، تعداد المان‌ها، درصد $\eta = ۰/۲۲$ با ۶۵۲۴ درجه‌ی آزادی)



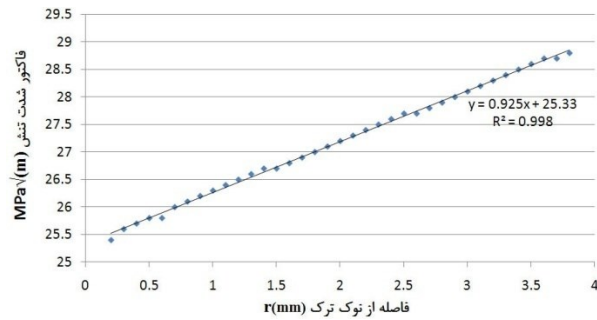
شکل ۱۳ برازش خط به ضریب‌های شدت تنش محاسبه شده از شبکه بندی با المان‌های PLANE2

با توجه به برازش خط به ضریب شدت تنش در شکل ۱۳، مقدار ضریب شدت تنش در نوک ترک با استفاده از المان PLANE2، ۲۵/۳۳ به دست می‌آید.

۱۳- نتیجه گیری

با توجه به این که در روش اجزای محدود معمولی هیچ گونه ابزاری، به جز قضاوت مهندسی، برای تعیین مناسب بودن اندازه المان به کار رفته و نیز دقت حل، در دسترس مهندسين نمی باشد، و انتخاب اندازه المان بیشتر بر اساس توصیه های داده شده صورت می گیرد، در این پژوهش با هدف جلب توجه محققین، مهندسين و دانشجویان به مسأله مهم خطاها در روش های عددی به ویژه اجزای محدود، ضمن بیان مبانی تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود، از روش اجزای محدود وفقی به عنوان یک ابزار قوی برای غلبه بر محدودیت های روش اجزای محدود معمولی، استفاده شد.

در این مقاله به کمک اجزای محدود وفقی، روشی جهت تبیین ضریب شدت تنش، که برای هر ترک در یک سازه پیچیده و تحت بارگذاری دلخواه قابل اعمال است، با قابلیت اطمینان بالا معرفی گردید. همچنین توانایی الگوریتم به کار رفته در نرم افزار تجاری ANSYS جهت تخمین خطای تحلیل اجزای محدود سازه های دو بعدی نسبت به روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا (SPR) که در این پژوهش جهت تخمین خطای اجزای محدود استفاده شد، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می دهد که نرم افزار ANSYS در تحلیل مسائل به کمک تخمین خطا و حل تطبیقی، دقت کمتر و هزینه ی بیشتری نسبت به روش به کار گرفته شده در این پژوهش دارد.



شکل ۱۶ برازش خط به ضریب های شدت تنش محاسبه شده از شبکه بندی با المان های PLANE82

۱۲- مقایسه

در جدول ۱ نتایج به دست آمده از دو المان PLANE2 و PLANE82 نرم افزار ANSYS و دو المان مثلثی شش گرهی و چهار ضلعی هشت گرهی به کار رفته در برنامه ی حاصل از این پژوهش بیان شده است. همان طور که مشاهده می شود برنامه در مقایسه با نرم افزار ANSYS در هر دو نوع المان برای رسیدن به درصد خطایی مشابه، دارای تعداد نقاط گره ای کمتری می باشد. مقدار ضریب شدت تنش به دست آمده از نتایج برنامه در مقایسه با نرم افزار ANSYS، دقت بسیار قابل توجهی دارد. با افزایش مرتبه المان، با وجود این که درصد خطای نسبی کاهش یافته است؛ اما در میزان ضریب شدت تنش تغییر چندانی مشاهده نمی شود.

جدول ۱ نتایج به دست آمده از برنامه و نرم افزار ANSYS

مشخصات / نوع المان	مثلثی برنامه	مثلثی PLANE2 (ANSYS)	چهار ضلعی برنامه	چهار ضلعی PLANE82 (ANSYS)
تعداد گره ها در شبکه اولیه	۹۱۷	۵۲۶	۷۱۳	۳۷۰
تعداد گره ها در شبکه نهایی	۱۵۶۸	۱۵۸۸	۱۷۵۸	۳۲۶۲
تعداد المانها در شبکه اولیه	۴۲۸	۲۴۱	۲۱۶	۱۰۹
تعداد المانها در شبکه نهایی	۷۳۳	۷۲۳	۵۵۵	۱۰۱۷
درصد خطای نسبی شبکه اولیه	۳/۷۷	۷/۲۹	۴/۶۹	۹/۴۶
درصد خطای نسبی شبکه نهایی	۰/۴۲	۰/۵۹	۰/۲۱	۰/۲۲
ضریب شدت تنش شبکه نهایی	۲۵/۱۶	۲۵/۳۳	۲۵/۱۷	۲۵/۳۳
درصد خطای ضریب شدت تنش از میزان تئوری	۰/۰۴	۰/۶۳	۰	۰/۶۳

تقدیر و تشکر

این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام گردیده است.

پی نوشت

- ¹ Superconvergent Patch Recovery
- ² Advancing Front
- ³ L2 Projection Method
- ⁴ patch
- ⁵ Energy Norm
- ⁶ Neice and Marcal
- ⁷ h-refinement
- ⁸ p-refinement
- ⁹ element subdivision (enrichment)
- ¹⁰ r-refinement
- ¹¹ mesh regeneration or remeshing
- ¹² Unstructured
- ¹³ Advancing Front

مراجع

- [1] Zienkiewicz O.C., *Achievements and some unsolved problems of the finite element method*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, 2000, pp.28.
- [2] Zienkiewicz O.C., *The background of error estimation and adaptivity in finite element computations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 195, pp. 207-213, 2006.
- [3] Zienkiewicz O.C. and Zhu Z., *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, pp. 337-357.
- [4] Zienkiewicz O.C. and Zhu Z., *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, 1992, pp. 1331-1364.
- [5] Zienkiewicz O.C. and Zhu Z., *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, 1992, pp. 1365-1382.
- [6] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. and Zhu J.Z., *The finite element method*, 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [7] McNeice G.M. and Marcal P.V., *Optimization of finite element grids based on minimum potential energy*, Journal engineering of Industry. ASME, Vol. 95, No.3, 1974, pp. 99519.
- [8] Babuska I. and Rheinboldt W.C., *A-posteriori error analysis of finite element solution for one-dimension problems*, SIAM J Num. Anal., Vol. 18, 1981, pp. 565-589.
- [9] فرهاد جاویدراد، مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی، تهران، صنایع هوافضا، ۱۳۸۳.
- [10] نیما جمشیدی و بهاره جوانبخت، آموزش طراحی اجزا و مقاومت مصالح به کمک نرم افزار [7] ANSYS، تهران، سیمین دخت، ۱۳۸۴.
- [11] Release 11.0 Documentation for ANSYS, ANSYS HELP, 2007.