آموزش نقش نرم افزارهای هندسه‌ی پویا در حل مسئله هندسه با تمرکز بر حدسیه سازی

ابراهیم ریحانی[۱]، حمید مسگرانی[۲] و فاطمه فرمهر[۳]

چکیده

یاددهی و یادگیری هندسه در دوره متوسطه، به طور معمول با مشکلات زیادی همراه بوده است. پژوهش ها در حوزه‌ی آموزش ریاضی نشان می‌دهند که استفاده از نرم افزارهای هندسه‌ی پویا می‌تواند برخی از این مشکلات را کاهش دهد. تحقیق حاضر، با هدف بررسی تأثیر نرم افزارهای هندسه‌ی پویا بر توانایی حدسیه سازی در حل مسائل هندسه، با شرکت ۱۴۵ نفر از دانش آموزان سال اول و دوم دبیرستان و معلمان ریاضی اجرا گردید. این تحقیق، کیفی و به صورت مطالعه‌ی موردی، بر پایه‌ی مشاهده‌ی مستقیم، مصاحبه‌ی بالینی، تحلیل نوارهای ویدئویی و فعالیت های ذخیره شده در نرم افزار صورت گرفته است. نتایج تجزیه و تحلیل داده های این تحقیق نشان می‌دهد که نرم افزار با فعال سازی طرحواره های مرتبط و مناسب تر، تشویق فرد به استفاده از راهبردهای حل مسئله، تأثیر مثبت در نحوه‌ی کنترل فرایند حل و باورهای فرد، توانایی های حل مسئله به ویژه ساخت حدس های منطقی و خلاقانه را افزایش و توسعه می‌دهد.

کلمات کلیدی: حل مسئله – حدسیه سازی – نرم افزار هندسه پویا

۱– مقدمه

در سالهای اخیر ایده های هندسی به دلیل کاربردهای جدید آن در ریاضیات و علوم دیگر، مورد توجه و علاقه بسیاری از آموزشگران بوده است. با تعاریف و تعابیر جدیدی که از هندسه به عمل آمده است، هندسه در برگیرنده پدیده‌های بصری متفاوتی می‌شود [۱]. هندسه مدرسه‌ای از یک سو، مهارت دقت در مشاهده و منطقی بودن در استدلال و اثبات را در دانش آموز تقویت می‌کند و از سوی دیگر، درسی چالش برانگیز، غیر الگوریتمی و مشکل در یاددهی و یادگیری محسوب می‌شود[۲]. امروزه یکی از دلایل مهم برای آموزش هندسه در مدرسه، ظرفیت و قابلیت بالای آن برای آموزش **هنر حل مسئله** است.

مقاله در تاریخ ۸۷/۹/۲۵ دریافت و در تاریخ ۸۷/۱۰/۲۳ به تصویب نهایی رسید.

[۱] **استادیار**، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی- پست الکترونیکی e_reyhani@yahoo.com

[۲] **استادیار**، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

[۳] **دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی**، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

روش تدریس معلم و کتاب درسی، دو عامل اساسی در تدریس هندسه و افزایش توانایی حل مسئله در دانش آموزان است.

مشاهده، مقایسه، آزمایش و دست‌ورزی با حالات و شکل‌های مختلف یک مسئله و ارایه حدس های منطقی به دانش آموزان در فرایند حل مسئله کمک شایانی خواهد کرد. این امر مستلزم بهره گیری از شیوه های جدید تدریس و نیز ابزارهایی برای تسهیل در اجرای این شیوه‌هاست. همچنین از جمله ضعف های کتاب درسی، عدم توجه به فعالیت هایی مانند آزمایش و دست‌ورزی با مسئله بعد از حل آن است که فعالیت های مربوط به گام چهارم[۱] مدل حل مسئله‌ی **پولیا**[۲] مانند تعمیم و طرح مسئله[۳] را شامل می‌شوند.

تحقیقات انجام شده درباره آموزش هندسه، نشان می‌دهد که می‌توان با استفاده از وسایل کمک آموزشی از جمله نرم افزارهای هندسه‌ی پویا، بسیاری از ضعف‌های آموزشی را کاهش داد و یا برطرف نمود [۳]. این نرم افزارها اولین بار در سال ۱۹۸۸ در فرانسه، توسط **جین و مارلین لبرد**[۴] با طراحی **نرم افزار کبری**[۵] معرفی شدند[۴]. طراحی این گونه نرم افزارها بر پایه‌ی تعریف و نمایش شکل‌های هندسی،

خواص آنها و روابط حاکم بر آنها بوده است [۵]. امکانات عمومی این نرم افزارها شامل گزینه های متنوع برای ترسیم، اندازه گیری، محاسبه، آزمودن خواص و درگ[۶] شکل ها است، که یک محیط آزمایشگاهی برای حل مسائل ریاضی را برای معلم و دانش آموز فراهم می‌کند[۶].

این تحقیق با هدف بررسی تأثیرات نرم افزارهای هندسه‌ی پویا در کاهش مشکلات حل مسئله در هندسه و با تمرکز بر افزایش توانایی حدسیه سازی دانش آموزان در محیط نرم افزارهای پویا انجام شده است. به همین منظور در ابتدا به تشریح عوامل مؤثر در حل مسئله و حدسیه سازی در چارچوب مدل‌های حل مسئله‌ی دو تن از آموزشگران مطرح ریاضی پرداخته و سپس عملکرد نرم افزار کبری در کاهش مشکلات مذکور در این چارچوب ها توصیف می‌شود.

۲- مبانی نظری تحقیق

یکی از اهداف مهم آموزش ریاضی، توسعه‌ی مهارت های حل مسئله می‌باشد. از سوی دیگر گام اساسی و تعیین کننده در فرایند حل مسئله، ساخت حدس‌های منطقی توسط حل کننده است. حدسیه سازی به معنی طرح ایده یا نظری است که می‌تواند درست باشد[۷]. برای این منظور متمرکز شدن و دست‌ورزی با مسئله به ساخت حدس های مناسب کمک می‌کند. همچنین در صورتی که فرد، مرحله به مرحله بازخورد پیاده سازی حدس هایش را در مسیر حل در اختیار داشته باشد، می‌تواند به اصلاح به موقع آن نیز اقدام کند[۲]. البته عوامل و فعالیت‌های دیگری نیز در حل مسئله و ساخت حدس دخالت دارند. در این مقاله به دو مدل ارایه شده توسط آموزشگران ریاضی اشاره می‌شود:

شوئنفلد[۷] (۱۹۸۶) برای تحلیل فعالیت حل مسئله در ریاضی، مدلی شامل چهار عامل را ارایه می‌دهد. این عوامل شامل ذخایر دانشی، راهیاب ها[۸] و سطح شناخت فرد نسبت به آن‌ها، کنترل جاری در فرایند حل مسئله و نظام باورهای فرد می‌باشند. ذخایر دانشی فرد، گنجینه‌ی دانش ریاضی فرد است که با آن مسئله و چگونگی اجرا و پیاده سازی راه حل را می‌فهمد. راهیاب‌ها، پیشنهاداتی عمومی‌اند که به شخص کمک می‌کند تا مسئله را فهمیده و در حل آن پیشرفت کند. سطح شناخت، درجه‌ی اطمینان به درستی ذخایر دانشی است. کنترل به معنی انتخاب، نظارت، بازبینی و دنبال کردن راه حل‌های مناسب و یا اصلاح و ترمیم آنهاست. نظام باورهای فرد نیز شامل دیدگاه او نسبت به موضوع، محیط و خودش است [۸].

پولیا (۱۹۴۵) حل مسئله را فرایند در هم تنیده‌ای شامل: جلب و بسیج مواد اولیه و ذخایر دانشی؛ سازماندهی و بکارگیری آنها؛ تشخیص و به یادآوری عناصر آشنا و مطالب مرتبط، تکمیل مسئله با اضافه کردن اجزای کمکی یا تجدید ساختار آن؛ تجزیه مسئله به عناصر آن و ترکیب مجدد آن ها می‌داند [۹].

۳- پیشینه تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی حل مسئله و حدسیه سازی به کمک نرم افزارهای هندسه ی پویا

تحقیقات در مورد کاربرد ابزار به روانشناس روسی، **ویگوتسکی**[۹] برمی‌گردد. آثار او نشان می‌دهد که به کارگیری ابزار و تعامل دانش آموز با آن، ارتقاءی یادگیری و بهبود عملکرد را در پی دارد[۲]. پژوهش‌های مبتنی بر نظریه‌ی واسطه مندی ابزار (**هولبراندز**[۱۰] (۲۰۰۷) و **کلدر**[۱۱] و همکاران (۲۰۰۶)) نشان داده‌اند که با استفاده از فناوری، چرخه‌های متفاوت و ارتقاء یافته‌ای در یادگیری و حل مسئله در هندسه ایجاد می‌شود [۱۰و۱۱]. مطالعات **هاداس**[۱۲] و **الکاوی**[۱۳] (۲۰۰۱) بیانگر این ایده است که استفاده از درگ، اندازه‌گیری، مقایسه و شکل های پشتیبان در محیط غنی نرم افزارهای هندسه‌ی پویا، می‌تواند گامی مؤثر به سوی حدسیه‌سازی منطقی و تعمیم باشد [۱۲]. **ویلر**(۲۰۰۰) اهمیت آزمایش با استفاده از نرم افزار در حدسیه سازی و حدسیه آزمایی را در تأیید درستی حدس‌ها، رد عمومیت آنها با آوردن مثال نقض، فرمول بندی مجدد و پالایش گزاره‌ها می‌داند. تحقیقات **آرزالو**[۱۴]و همکارانش (۱۹۹۸) نیز نشان می‌دهد که امکان درگ و اندازه‌گیری در این نرم افزارها، علاوه بر تأیید حدس ها، به ساخت حدس ها نیز کمک می‌کند. او دسته بندی ذیل را در توصیف تأثیر این امکانات در حل مسئله و حدسیه سازی ارایه می‌دهد:

- **درگ برای ساخت حدس ها**[۱۵]: در این مرحله فرد ایده‌ی خاصی در ذهن ندارد و با درگ شکل به دنبال یافتن ایده‌ای برای حدسیه‌سازی است. به این ترتیب حل کننده سعی می‌کند که با درگ، جنبه های مختلف مسئله را لمس کرده و

با تلفیق آن ها با داده های پیشین به حدسیه سازی بپردازد. این در حالی است که در روش متداول، انجام بسیاری از فعالیت ها بدون اطلاعات اولیه امکان ندارد.

- **درگ برای آزمودن حدس ها**[16]: از درگ برای آزمودن حدس های پیاده سازی شده و شناسایی خواص و ناورداها[17] استفاده می‌شود.

- **درگ برای اجرای گام چهارم پولیا**[18]: درگ هایی که در آن بعضی روابط حفظ می‌شوند، مانند وقتی که دانش آموز شکلی را در راستای افق می‌کشد تا تغییرات آن را بررسی کند [۱۱].

آرزالو و همکاران، فعالیت‌های دانش آموز برای حدسیه‌سازی در محیط هندسه‌ی پویا را به صورت زیر طبقه بندی می‌کنند:

- **فعالیت های واکنشی**[19]: شامل فعالیت هایی برای پاسخ به عمل نرم افزار بوده و استدلال حل کننده با توجه به شکل های متحرک و موجود روی صفحه‌ی رایانه است. در این فعالیت ها دانش آموز ممکن است به اهمیت کار خود آگاه نباشد و بی هدف شروع به کار کند. عکس العمل و اعمال او با توجه به نقاشی ها و ترسیمات است و بازخورد گرفته شده از این نقاشی‌ها، پایه های حدس او را شکل می‌دهد.

- **فعالیت های هدفدار**[20]: در این فعالیت‌ها دانش آموز به صورت هدفدار و با داشتن یک ایده و حدس به ظاهر معتبر و همچنین با آگاهی از خواص و روابط هندسی، از نرم افزار استفاده می‌کند. البته بعد از مدتی فعالیت‌های واکنشی به هدفدار تبدیل می‌شود. این گونه فرایندها از دیدگاه **پیاژه** (۱۹۷۰) به برداشت‌های انتزاعی آن‌ها و از نظر **آرزالو** و همکاران (۱۹۹۸) و **لبرد**(۱۹۹۸) به کارهای گذشته‌ی دانش آموزان بستگی دارد [۱۱]. ارتباط انواع درگ و اندازه-گیری با نوع فعالیت دانش آموزان در جدول (۱) ارایه شده است.

آزمایش در محیط هندسه‌ی پویا علاوه بر حدسیه سازی از جنبه های زیر نیز در فرایند حل مسئله ارزشمند است:

- **حل مسئله شبیه افراد خبره: ویتلی**[21] معتقد است با استفاده از نرم افزارهای هندسه پویا، دانش آموز می‌تواند مانند افراد خبره مسئله حل کند. یعنی تجربه کرده، طراحی و آزمایش نموده و هوشمندانه تر مسیر حل را بیابد [۱۳].

جدول ۱ فعالیت های دانش آموزان حین استفاده از درگ و اندازه گیری [۱۱].

اندازه گیری	درگ	فعالیت
ــــــــــ	بی هدف	واکنشی
اندازه گیری در راستای حدسیه‌سازی یا جستجو و بررسی ناورداها	برای حدسیه‌سازی یا جستجو و بررسی ناورداها	واکنشی – هدفدار
اندازه گیری برای آزمودن ترسیمات	برای بررسی حدس ها درگ برای تعمیم	هدفدار

- **حل مسئله‌ی فعال:** کار در این محیط دانش آموز را بیشتر و فعالانه تر درگیر حل مسئله می‌کند. مطالعات **گری**[22] (۱۹۹۷) نشان داد که این گونه نرم افزارها علاوه بر این که به دانش آموز اجازه می‌دهد تا حدسیه سازی و حدسیه آزمایی کند، او را به روشی مؤثرتر و پویاتر درگیر آموختن و حل مسئله می‌کند. در این تحقیقات مواردی مشاهده شد که شکل‌ها و سؤالات دانش آموزان غیرمنتظره، عجیب و حتی خارج از دامنه اطلاعات معلم بود[۱۴].

- **خودراهبری:** بررسی‌های **آرنز**[23] و همکاران (۲۰۰۳) نشان می‌دهد که دانش آموز در محیط پویا، بیشتر در کارش غرق گشته و به تدریج به خود متکی می‌شود (خود راهبر شدن دانش آموز) و وابستگی او به فرد آگاه کمتر خواهد شد [۱۵].

- **پی بردن به ارزش مثالهای گوناگون:** تحقیقات **یورشاملی**[24] تأیید می‌کند در طی این آزمایشات، دانش آموز ارزش بررسی مثال های متعدد برای دستیابی به حالت‌های حدی، مثال نقض و اشکال غیر کلیشه‌ای را برای حدسیه سازی منطقی درک می‌کند [۱۴و۱۶].

- **تقویت قدرت یادگیری: کوک**[۲۵] **و گلدنبرگ**[۲۶] (۱۹۹۷) در مطالعات خود نشان دادند با اجازه به دانش آموزان برای بررسی شکل‌های متنوع و انعطاف‌پذیر در محیط نرم افزاری هندسه‌ی پویا، توانایی ساخت ذهنی آن‌ها ارتقاء می‌یابد و این توانایی مهارتی مؤثر در تفکر تحلیلی است [۱۴]. به علاوه دانش آموزان می‌توانند این قابلیت را به آموزش و حل مسئله در سایر مباحث ریاضی مانند حساب و جبر گسترش دهند [۱۳].

- **طرح مباحث جدید:** با ورود این آزمایشگاه نرم افزاری به حوزه‌ی ریاضی، خلق روش‌های بدیع دور از انتظار نیست. **شوارتز و یورشاملی** (۱۹۹۷) معتقدند که هندسه‌ی پویا می‌تواند راه ساخت ریاضیاتی تازه را هموار کند، چراکه باعث درکی جدید و بالطبع تفکری متفاوت نسبت به مسئله می‌شود [۱۴].

- **غافلگیر شدن حل کننده:** آزمایش و دست‌ورزی در محیط نرم افزاری به دانش آموز در یافتن مثال‌های نقض، حالت های خاص و غیر منتظره و نیز موقعیت هایی که در محیط سنتی غیرقابل تصور هستند کمک می‌کند. استفاده از این تکنیک به این دلیل با ارزش است که باعث می‌شود تا دانش آموز در مورد صحیح و نامخدوش بودن حدس های خود حساس بوده و در موقعیت ارزیابی و قضاوت در مورد حدس هایش قرار گیرد. علاوه بر این مانند محرکی برای بازنگری در دانش و حدس ها و ایجاد شرایط مناسب برای یادگیری معنادار عمل می‌کند [۱۲ و ۱۷].

- **دادن بازخورد فوری:** دادن بازخورد به تصحیح و تکمیل حدس ها کمک می‌کند. در حالی که غافلگیری، تضادی را بین انتظارات حل کننده از حدس ها و نتایج آن ها به وجود می‌آورد، آزمایش در محیط نرم افزار امکان بازتاب فکورانه بر کارها و عمل دوباره را فراهم می‌کند. هدایت دانش آموز به نحوه‌ی صحیح استفاده از بازخوردهای نرم افزار، به طور بالقوه مؤثرتر از بازخورد توسط معلم است؛ زیرا دانش آموز وادار به بررسی تعارضات و یافتن راه منحصر به فرد خود برای مسئله می‌شود [۱۲]. **هولبراندز، بلک**[۲۷] و همکاران (۲۰۰۸) نشان دادند که در این فرایند دانش آموز نسبت به یادگیری خود احساس مالکیت دارد (یافته ها را نتایج کاوش و اکتشاف خود می‌داند) و درک او از مطلب نیز عمیق تر خواهد شد[۱۱و ۱۸].

۴– اهداف تحقیق

- بررسی تأثیرگذاری نرم افزار کبری در حل مسئله در دوره‌های کوتاه مدت آموزش.
- بررسی تأثیر نرم افزار در تولید حدس های معتبر و آزمایش آن.

۵– روش تحقیق

در این تحقیق، بررسی فرضیه ها و پاسخ گویی به سؤالات مطرح شده به صورت کیفی و مطالعه موردی انجام گرفت. در اجرای میدانی، ۳۲ نفر از دانش آموزان سال دوم یک مدرسه‌ی دولتی منطقه ۱۴ تهران، ۵۸ نفر از دانش آموزان سال اول و دوم یک مدرسه‌ی غیردولتی منطقه یک تهران، ۱۰ نفر از دانش آموزان سال دوم مدرسه‌ی فرزانگان بیرجند و ۱۰ نفر دبیر ریاضی از استان‌های مختلف و دانشجو در مقطع فوق لیسانس دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی و ۳۵ نفر از دانش جویان رشته‌ی دبیری ریاضی این دانشگاه شرکت داشتند. همچنین برای جمع آوری داده های مناسب، از مشاهده، مصاحبه، تجربه در محیط، ضبط ویدئویی چند جلسه و نیز جلسات ذخیره شده[۲۸] در خود نرم افزار استفاده گردید.

۶– روش انتخاب سؤالات

در این تحقیق، ۱۶ مسئله هندسه مورد استفاده قرار گرفته است. این مسائل از منابع معتبر گزینش شده و ملاک های زیر در انتخاب آنها مورد توجه بوده اند.

۱- خارج از مباحث مطرح شده در کتاب درسی نباشند.
۲- زنجیره اثبات و حل آنها سرراست نباشد.
۳- مسائل از حیث رهیافت ها غنی باشند.
۴- مسائل مربوط به مبحث مثلث و چهار ضلعی و باز پاسخ باشند. باز بودن مسئله به این معنی است که :
- بتوان چند شکل متفاوت برای آن ترسیم کرد.
- شکل‌های متفاوت، استدلال های متفاوتی را نیاز داشته باشند.
۵- تا حد امکان اجزای قابل تغییر در مسئله وجود داشته باشد.

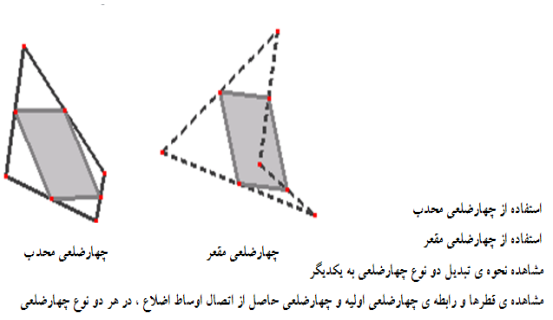
۷– نتایج

تحلیل داده های حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که استفاده از نرم افزارهای هندسه‌ی پویا در حل مسائل هندسه به موفقیت فرد در ساخت حدس‌ها و پیشرفت عملکرد او در حل مسئله منجر می‌شود. نرم افزار در تقویت و توسعه‌ی طرحواره‌های[۲۹] فرد، مؤثر بوده و در جهت‌دار شدن کنترل و باورهای حل کننده تأثیر قابل ملاحظه‌ای دارد. در ادامه شواهد تأیید کننده‌ی این نتایج، با توجه به چارچوب مدل حل مسئله شوئنفلد و پولیا ذکر شده است.

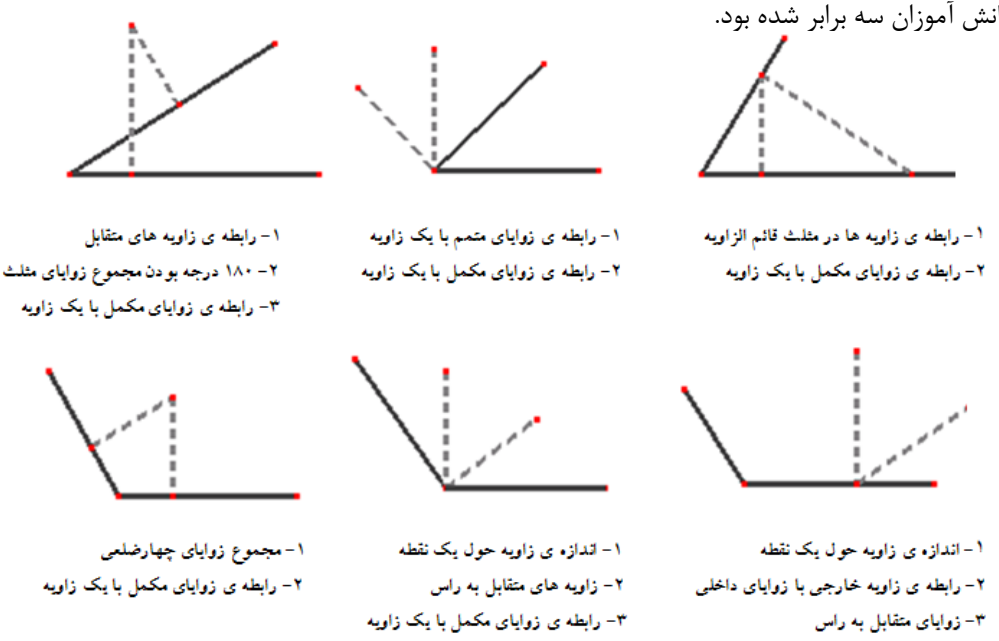
۷–۱ برقراری یا برجسته کردن پیوند بین طرحواره های موجود در ذخایر دانشی

دست ورزی و حل مسئله در محیط کبری، دانش آموز را قادر می‌سازد، مسئله را از جوانب مختلف بررسی کند و داده‌های عددی و بصری بیشتر و متنوعی در اختیار داشته باشد. در مسئله‌ی یک[۳۰]، دانش آموزان بدون استفاده از نرم افزار، تنها به یک حالت از مسئله بسنده و از سه قضیه و تعریف برای درستی ادعای خود استفاده کردند. اما در محیط کبری برای این مسئله ۶ شکل ارایه و از ۹ قضیه، تعریف و اصل استفاده شد (شکل ۱). به عبارت دیگر تعداد مطالب فعال شده و ارتباطات برقرار شده بین اطلاعات در ذهن دانش آموزان سه برابر شده بود.

بدون کمک نرم افزار دانش آموزان تنها چهارضلعی‌های محدب را برای حل مسائل انتخاب می‌کردند. در حالی که برای حل مسئله۲[۳۱]، ناپایداری و انعطاف پذیری شکل ها در محیط کبری، هم چهارضلعی‌های محدب و هم مقعر را به دانش آموزان نشان می‌داد (شکل ۲). این شرایط علاوه بر تحریک کنجکاوی و غافل گیرشدن آنها، به کارگیری و استفاده از انواع چهارضلعی ها، اعم از محدب و مقعر را برای دانش آموزان بارز و طرحواره های مرتبط با حل این مسئله را غنی تر نمود.



شکل۲ نقش کبری در نمایان کردن پیوندهای موجود بین ذخایر دانشی در مسئله ۲

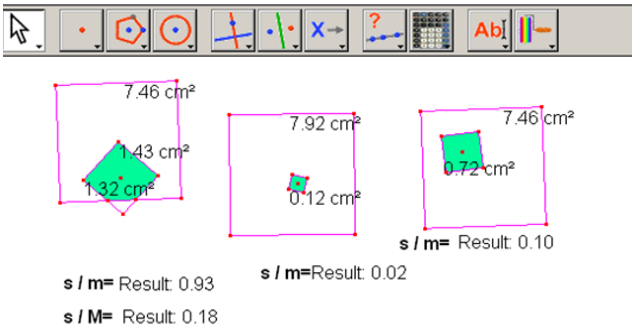


شکل ۱ شکلهای رسم شده در محیط کبری برای مسئله ۱ و ذخایر دانشی مورد استفاده

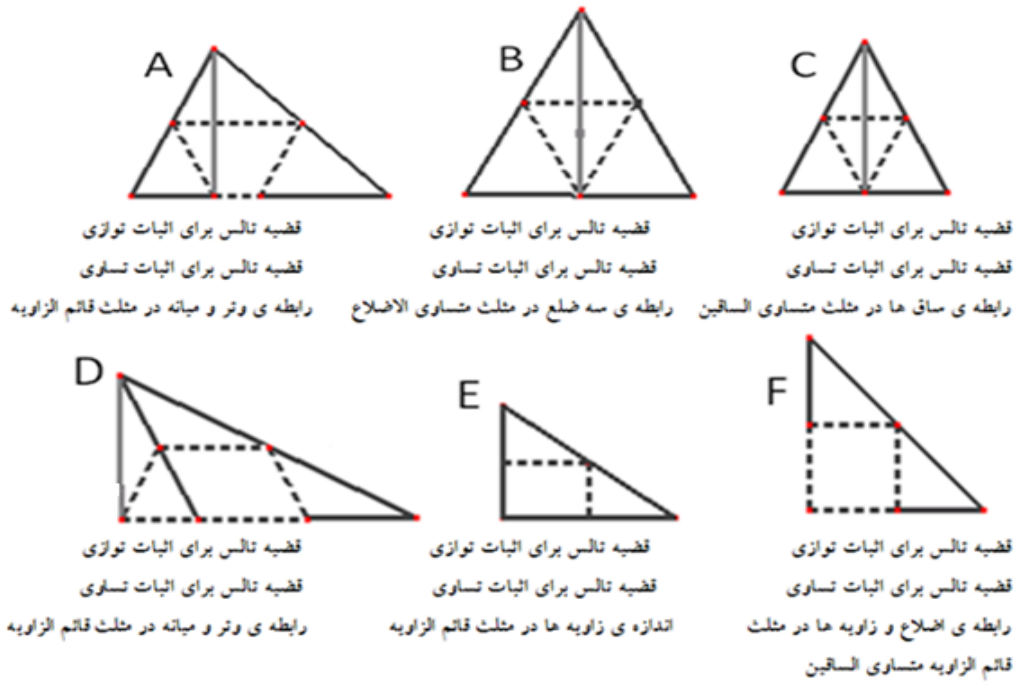
۷-۲ ارتقاء سطح شناخت

دست‌ورزی و آزمایش با داده‌های مسئله در جهت ارتقاءی شناخت نسبت به آن‌ها، فعالیتی ارزشمند است. زیرا به دانش آموز کمک می‌کند تا اهمیت و جایگاه فرض ها و حکم های مسئله را تشخیص دهد و حل کننده را به باور قلبی در مورد درستی حکم می‌رساند. علاوه‌بر این، دانش آموز را در یافتن مسیر اثبات یاری می‌کند. همچنین نرم افزار به دانش آموز اجازه‌ی شک نسبت به داده‌های مسئله و ذخایر دانشی را نیز می‌دهد. به عنوان شاهد، بررسی حکم مسئله۳[۳۲] باعث شد دانش آموزان بتوانند اولین حکم را برای یک حالت خاص از مسئله، یعنی مثلث با زاویه باز (حالت D در شکل۳) تشخیص دهند. در این شکل، مثلث‌ها و روابط مورد نیاز را ساده‌تر شناسایی کرده و به اثبات صوری آن می‌رسند. با توجه به این فعالیت، انتخاب مثلث‌ها در حالت کلی، سریع تر و ساده شد. یعنی بررسی حکم در محیط نرم افزار یک نقطه‌ی شروع مناسب را به دانش آموز نشان داد. در شکل۳ انتخاب مثلث ها و قضایای مربوط و تعداد حالت های مختلفی از حکم مسئله که توسط دانش آموزان به کمک نرم افزار ترسیم گشته، ارایه شده است.

در مسئله۴[۳۳] ترسیم شکل مسئله و درگ آن و ارائه‌ی داده‌های عددی برای مساحت مشترک باعث شد دانش آموز به لزوم رعایت شرط متقاطع بودن دو مربع پی ببرد. همان طور که در (شکل ۴) نشان داده شده است محسوب نکردن این شرط، به پیدایش حالت هایی با مساحت های متفاوت و عدم دستیابی به رابطه‌ی اصلی می‌انجامد.



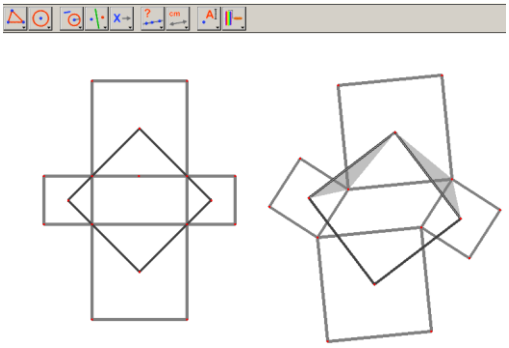
شکل۴ ارتقاء سطح شناخت نسبت به داده های مسئله۴



شکل۳ ارتقاء سطح شناخت نسبت به حکم مسئله۳ و انتخاب ساده تر مثلثها در مثلث با زاویه ی باز

۷-۳ تأثیر نرم افزار کبری در بسیج ذخایر دانشی

تشخیص و یادآوری اطلاعات به حل کننده کمک می‌کند تا منابع مرتبط و مناسب‌تری را برای حل مسئله فعال کند. قابلیت ترسیم، درگ، اندازه‌گیری و آزمایش در کبری این فرایند را تسهیل و تسریع می‌کند. ارزش این فعالیت از این جهت است که استفاده از شکل‌های ایستا، دانش آموز را از تشخیص و شناسایی اجزا و الگوهای پیچیده باز می‌دارد. اما در محیط کبری شکل‌ها را می‌توان انعطاف پذیر رسم کرد. در نتیجه این نوع ترسیمات موجب می‌شود، از تعمیم ناصحیح موضوع به موارد مشابه جلوگیری شود. از سوی دیگر گفتگو در مورد هر حالت، مهارت طرح مسئله را نیز در دانش آموز تقویت می‌کند و باعث درک بهتر صورت مسئله می‌شود. در مسئله ۵[۳۴] این عملکرد نرم افزار به وضوح در گفتگوی اعضا با یکدیگر نمایان بود. زیرا چرخش مربع‌ها و تبدیل متوازی الاضلاع به مستطیل به دانش آموزان انتخاب راهبرد مناسب و روش اثبات آن را نشان می‌داد. شرح این گفتگوها در ادامه‌ی مقاله در قسمت (۷-۱-۲) ذکر شده است.

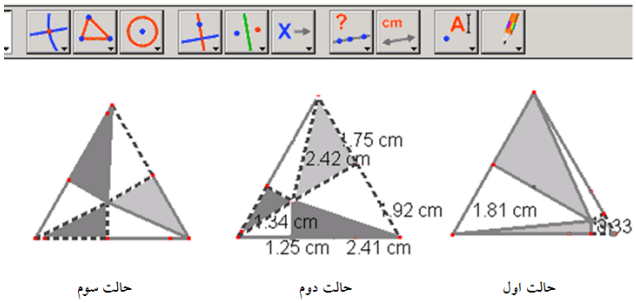


شکل۵ چرخش مربع ها و نشان دادن راهبرد مورد نیاز مسئله برای اثبات حالت کلی

۷-۴ کنترل فرایند حل مسئله

یکی از عوامل تعیین کننده در موفقیت و شکست حل کننده، نوع کنترل او در فرایند حل مسئله است. دادن بازخورد مناسب و فوری و غافلگیر شدن حل کننده با پیاده سازی حدس هایش، به او کمک می‌کند سریع تر انحراف راه حلش را تصحیح و ترمیم کرده و در مسیر درست قدم بگذارد.

یکی از انتخاب های دانش آموزان برای حل مسئله‌ی۶[۳۵]، انتخاب شش مثلث بود که در در حالت سوم شکل۶ مشخص شده است. به نظر می‌رسید این انتخاب، به کشف الگو یا رابطه‌ای در ۶ مثلث می‌انجامد. دانش آموزان ابتدا و در جهت تأیید حدس خود، شروع به اندازه گیری قاعده ها و ارتفاع ها نمودند، اما با درگ نقطه‌ی مشترک و به دست آوردن اعداد نامرتبط، نادرستی این پیشنهاد مشخص گشت. لذا دانش آموزان این انتخاب را کنار گذاشتند.



شکل۶ اصلاح و ترمیم حدس های غلط دانش آموزان در مسئله ۶

۷-۵ نظام باورها

باورهای دانش آموز هم عامل بازدارنده و هم عامل محرک در فرایند حل مسئله محسوب می‌شوند. در این محیط دانش آموز می‌تواند شکل مسئله را منعطف و ناپایدار ترسیم کند، در نتیجه علاوه بر این که حس کنجکاوی او برای حل مسئله تحریک می‌گردد، به او این امکان داده می‌شود که حالتی خاص یا حدی از مسئله را کشف کند که به دانش او نزدیک‌تر بوده و قادر به نوشتن اثباتی برای آن باشد. به این ترتیب موقعیت‌های غلبه بر مسئله برای دانش آموز فراهم می‌شود. همچنین با توجه به دادن بازخورد در جهت تصحیح مسیر حل به عنوان پشتیبان حل کننده‌ی مسئله، او را برای ادامه‌ی مبارزه، تحریک و تشویق می‌کند. اثر دیگر استفاده از نرم افزار، در آموزش ضمنی تأمل و تفکر است. زیرا نمایش جوانب و ابعاد مختلف مسئله در محیط کبری باعث می‌شود دانش آموز قضاوت در جواب دادن به مسئله را به تعویق انداخته، بعد از آزمایش و بررسی داده ها و با آمادگی بیشتری برای پاسخ گویی اقدام کند.

۸– فعالیت دانش آموزان در کارگاه حل مسئله

نرم افزار کبری در پویایی و فعال‌تر شدن دانش آموزان در کلاس درس نیز تأثیر قابل توجهی دارد. افزایش این فعالیت‌ها و تعاملات می‌تواند با ایجاد فرصت برای پیاده سازی استانداردهای آموزشی، به توسعه یادگیری و مهارت های حل مسئله دانش آموزان منجر شود. تعدادی از فعالیت های دانش آموزان در محیط نرم افزارهای هندسه پویا را می‌توان در محورهای زیر توصیف کرد.

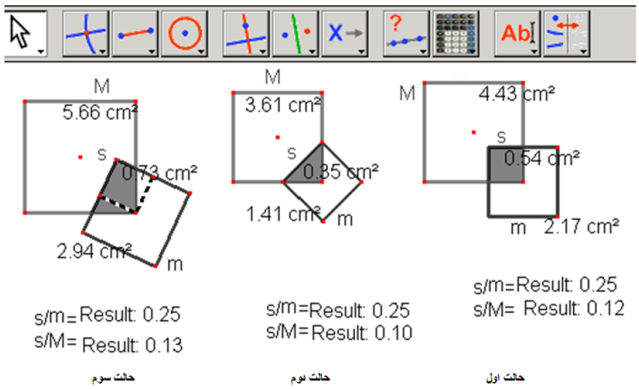
۸–۱ استفاده از راهبردهای حل مسئله

فعالیت حل مسئله در محیط هندسه پویا تا حدی با محیط سنتی متفاوت است. این تفاوت را می‌توان در دو محور فعالیت های مرتبط با به کارگیری راهبردهای حل مسئله و فعالیت های مرتبط با استدلال و اثبات بیان نمود. در ادامه به تبین این دو محور پرداخته می‌شود.

راهبردهای حل مسئله در افزایش درک فرد و پیشرفت در مسیر حل بسیار مؤثرند. آشنایی دانش آموزان با این راهبردها به افزایش مهارت های ریاضی آنها کمک می‌کند. در طول اجرا، دانش آموزان به طور ناخودآگاه و البته خام، به دسته‌بندی داده‌ها و به کارگیری راهبردهای حل مسئله می‌پرداختند. سه مورد از راهبردهایی که توسط دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گرفت، به شرح ذیل است:

– راهبرد بررسی حالت های خاص

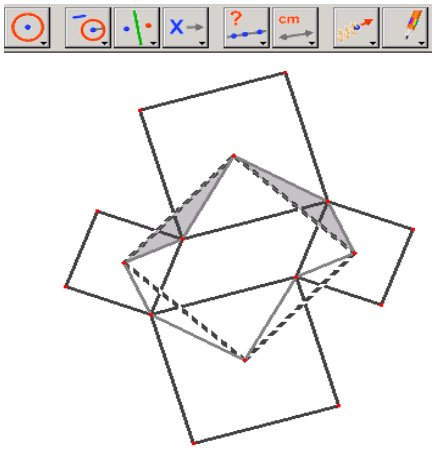
یکی از راهبردهایی که در تمام مسائل مورد توجه دانش آموزان قرار گرفت، راهبرد بررسی حالت خاص بود. یافتن حالت‌های ساده‌ای از مسئله و اثبات درستی آن علاوه‌بر تقویت اعتماد به نفس و جسارت درگیر شدن با مسئله، مسیر حل و اثبات در حالت کلی را نیز به دانش آموزان نشان می‌داد. به عنوان نمونه در مسئله ۴ (شکل ۷) دانش آموزان ابتدا با توجه به حالت‌های خاص اول و دوم و داده‌های عددی حاصل از مقایسه مربع‌ها، که رابطه‌ی موجود را به وضوح نمایش می‌دهد، به حدسیه‌سازی پرداختند و سپس با استفاده از حالت خاص اول، در مورد حالت سوم استدلال نموده و آن را اثبات کردند[۳۶].



شکل۷ حالت های مختلف مسئله۴. (s,m,M به ترتیب مساحت های مربع های بزرگ، کوچک و قسمت مشترک هستند.)

– راهبرد استفاده از زیر مسئله

یک راهبرد دیگر که مورد استفاده دانش آموزان قرار می‌گرفت، یافتن زیر مسئله‌های لازم بود. زیر مسئله یعنی استفاده از مسئله‌ای که امیدواریم حل آن به حل مسئله‌ی اصلی کمک کند. درگ شکل‌ها و بررسی و مقایسه حالت‌های مختلف مسئله، دانش آموزان را در انتخاب این راهبرد نیز یاری می‌کرد. در ادامه یک نمونه از گفتگوهای بین دانش آموزان در مورد مسئله ۵ (شکل ۸) ارایه شده است. این گفتگو نشان می‌دهد چگونه پویایی شکل، نقاط شروع و مسیر حل مسئله را برای دانش آموزان روشن می‌سازد.

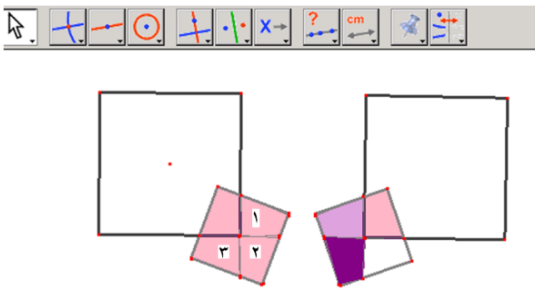


شکل۸ استفاده از راهبرد زیرمسئله

" با درگ و حرکت دادن مربع ها، یعنی وقتی شکل را می‌چرخانیم اضلاع زاویه های نقطه چین شده که به نظر ۹۰ درجه می‌آید، به اندازه‌ی زاویه‌های [حاده] خاکستری می‌چرخد. اگر نشان دهیم زاویه‌ای که کم می‌شود به اندازه‌ی زاویه‌ای است که به آن اضافه می‌شود، می‌توانیم ادعا کنیم مکان یک مربع است. برای این کار باید نشان دهید مثلث های خاکستری با هم برابرند."

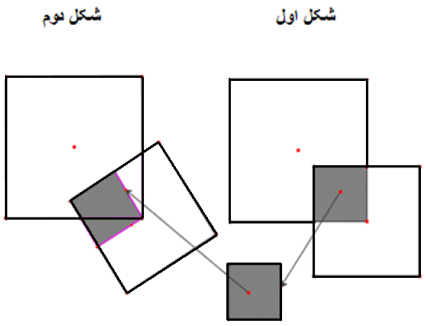
– استفاده از تبدیلات

در روال مرسوم و متداول، انجام تبدیلات و بکارگیری آن به عنوان یک راهبرد برای حل مسئله دشوار است. در حالی که با امکانات نرم افزار این راهبرد در راستای ساخت و بررسی حدس‌ها، انجام مقایسه ها و پیشرفت در مسیر حل مسئله بسیار مورد استفاده قرار می‌گرفت. به عنوان مثال، در مسئله ۴ (شکل ۹) یک گروه از دانش آموزان حدس زدند مساحت مشترک ۱/۴ مربع کوچک است، این گروه با گرفتن سه کپی از قسمت مشترک دو مربع (کپی در واقع ترکیب انتقال و دوران است) و با پوشاندن مربع کوچک، برای حدس خود استدلال خلاقانه ای ارایه دادند.



شکل۹ استفاده از تبدیلات برای استدلال درستی حدس با کپی گرفتن و پوشاندن مربع کوچک

گروه دیگری از دانش آموزان همان طور که در شکل ۱۰ آمده است، از قسمت مشترک شکل یک کپی گرفته و روی چند ضلعی شکل دوم قرار دادند تا تفاوت مربع و چند ضلعی را مشاهده و سپس حدسیه سازی نمایند. شایان ذکر است که در هر دو فعالیت مربی نیز با دانش آموزان همکاری می‌کرد.



شکل۱۰ استفاده از راهبرد کپی برای مقایسه ی قسمت مشترک در دو شکل

۸–۱ استدلال و اثبات

نحوه‌ی استدلال دانش آموز دراین محیط، با توجه به در اختیار داشتن امکانات متعدد جهت آزمایش و جمع آوری داده‌ها و متحرک و ناپایدار بودن شکل ها، به صورت حرکت نوسانی بین استنتاج تجربی و استدلال ریاضی است. دانش آموز می‌تواند با کمک گزینه های نرم افزار به جمع آوری اطلاعات و آزمایش با مسئله بپردازد تا به تدریج حالت های مسئله را کشف نموده و با اثبات رسمی درستی حدس خود را تأیید کند. در این صورت حرکت از استدلال تجربی به سمت اثبات رسمی شکل می‌گیرد. همچنین ممکن است که دانش آموز ابتدا شروع به حدسیه سازی و اثبات رسمی نموده اما برای بررسی و تأیید گزاره‌های موجود در اثبات رسمی خود، به دست ورزی با مسئله در محیط کبری بپردازد تا اثبات خود را پالایش و شفاف سازد. در این حالت حرکت از اثبات رسمی به سمت استدلال تجربی خواهد بود. هر چند در جلسات اول کار و با توجه به ویژگی محیط نرم افزار، ارزش و جایگاه اثبات‌های ریاضی و تجربی هم تراز می‌آمد، اما بحث های بین گروه‌ها و ایجاد چالش توسط مربی باعث شد که دانش آموزان در دفاع و تأیید درستی ایده‌ها و حدس‌های خود از اثبات رسمی استفاده کنند. همچنین به نحوه‌ی نوشتن و ارایه‌ی اثبات خود توجه داشته باشند. به این ترتیب علاوه بر تفکیک جایگاه دو نوع استدلال تجربی و ریاضی، ارزش اثبات رسمی نیز برای دانش آموزان مشخص شد.

۸–۲ مشارکت و علاقه مندی

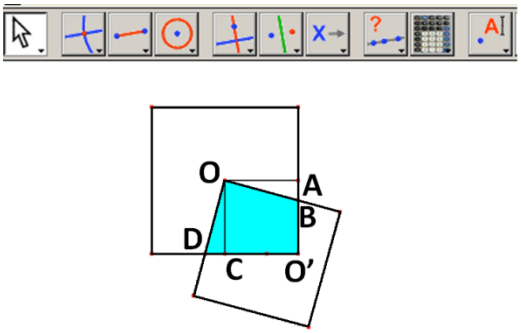
امکانات محیط آموزشی کبری و هم گروه بودن با دوستان، باعث می‌شد تا دانش آموزان با توجه بیشتر و به سرعت، شروع به دست‌ورزی با مسئله و انتخاب یک مسیر برای حل نمایند. برای اکثر گروه‌ها، آزمایش و جمع آوری داده‌های عددی، گام اول برای حدسیه سازی محسوب می‌شد. این فعالیت به دلیل سهولت کار و جدید بودن آن برای دانش آموزان بسیار جذاب و هیجان انگیز بود. امکان پیاده سازی ساده و سریع حدس‌ها، دادن بازخورد توسط نرم افزار و ایجاد چالش در انتخاب‌ها و تقویت روحیه پژوهش و تحقیق به عنوان یک پاداش درونی برای شرکت در فعالیت‌ها و تکاپو داشتن از ویژگی‌های کلاس بود. به طوری که در مواردی کارگاه‌های یک ساعته حتی تا سه ساعت ادامه می‌یافت. دانش آموزان حل موفق یک مسئله را بسیار هیجان انگیز، عظیم و پرافتخار می‌دانستند. این اشتیاق تا حدی بود که بعد از سه جلسه حتی افراد مخالف نیز در فعالیت‌های کلاس، همکاری و شرکت کردند.

۸–۳ پذیرش مسئولیت حل مسئله

در زمان اجرا سعی می‌شد نقش مربی، راهنمایی غیرمستقیم و عدم دخالت در انتخاب‌ها و گزینش‌های دانش آموزان باشد، زیرا هر گروه، یک راه حل یا قسمتی از آن را حدس زده و به آزمایش و نقد و بررسی حدس‌های خود می‌پرداخت. بعد از تأیید آن توسط نرم افزار و اعضای گروه، راه حل با مربی مطرح می‌شد. در این مرحله از فعالیت، مربی به عنوان یکی از اعضای گروه وارد شده و با اعضا به بحث می‌پرداخت. زمانی که راه حل از نظر اعضا گروه بدون نقض می‌نمود، به کلاس ارایه می‌شد در این مرحله اعضا گروه باید از حدس و راه حل خود در مقابل نقدهای مربی و سایر گروه ها دفاع می‌کردند.

۸–۴ ارتباط با سایرین

یکی از جنبه‌های هیجان آور کلاس حل مسئله در محیط نرم افزار، تعامل و مباحثه‌ی گروه‌ها و اعضای آنها بود. این گفت‌وگو در مورد حدسیه سازی، دفاع از ادعای خود و نقد یا رد حدس‌های دیگران بود و علاوه‌بر ارتقاءی درک فرد از مسئله و حدس راه حل‌های مختلف آن و درک ایده‌های دیگران، آرامش در گوش دادن، حساسیت نسبت به قضاوت، دقت در ارایه و پاسخ گویی را نیز در پی داشت. یک نمونه از گفت‌وگوی بین دانش آموزان در مورد مسئله ۴ (شکل۱۱) در زیر آمده است. این گفت‌وگو نشان می‌دهد که چگونه درگ شکل و گفت‌وگوی اعضا، مسیر حل را به گروه نشان می‌دهد.



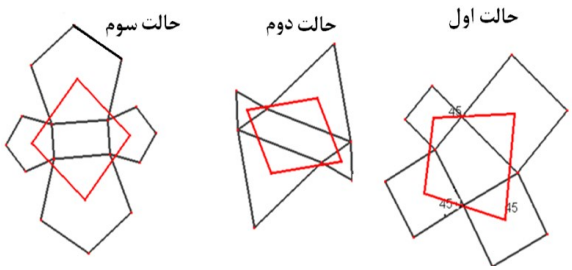
شکل۱۱ استفاده از راهبرد زیرمسئله

"با درگ و حرکت دادن مربع ها (یعنی وقتی شکل را می‌چرخانیم)، چند ضلعی OBO'D به مربع OAO'C تبدیل می‌شود. یعنی تفاوت مربع و چند ضلعی، در مثلث‌های ΔOAB و Δ ODC است. اما به نظر می‌رسد این دو مثلث با هم برابرند و بر هم منطبق می‌شوند. بر این اساس برای حل مسئله، باید ابتدا زیر مسئله‌ی مساوی بودن دو مثلث را ثابت کرد."

۸–۵ طرح مسئله

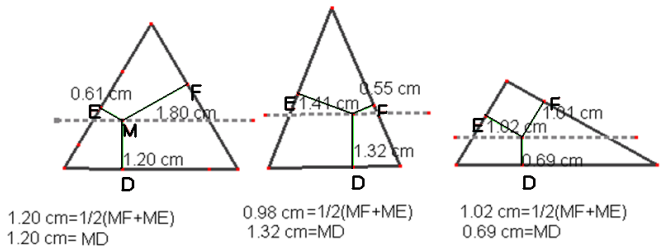
این فعالیت بیشتر مورد توجه دانش آموزان سطح بالا قرار می‌گرفت. برای این افراد حل شدن مسئله، پایان آن نبود. به عنوان نمونه بعد از حل مسئله‌ی ۵ ، دانش آموزان به بررسی شرط های مسئله پرداخته و سؤالات زیر را مطرح کردند:

- اگر به جای متوازی الاضلاع، یک چهار ضلعی محدب داشته باشیم حکم مسئله چگونه خواهد بود؟ (حالت اول در شکل ۱۲)
- اگر به جای ساختن مربع روی اضلاع، مثلث متساوی الاضلاع و یا در حالت کلی‌تر چند ضلعی منتظم ساخته شود، حکم مسئله چگونه تغییر می‌کند؟ (حالت دوم و سوم در شکل۱۲)



شکل۱۲ تعمیم مسئله ۵

به عنوان نمونه دیگر، در مسئله‌ی ۷[۳۷]، یک مورد از بررسی و تغییر در فرض‌های مسئله این بود که حکم مسئله برای سایر مثلث‌ها چگونه خواهد بود (شکل۱۳). به عبارت دیگر *آیا متساوی الاضلاع بودن مثلث شرطی اساسی در مسئله است ؟ آیا می‌توان حکم را برای مثلث های دیگری تعمیم داد ؟!*
در این مورد آزمایش در کبری نشان داد مسئله فقط برای مثلث متساوی الاضلاع صادق است.



شکل۱۳ بررسی حکم مسئله ۷ در سایر مثلث ها

نرم افزار با فراهم کردن یک آزمایشگاه برای تأیید یا رد حدس‌ها و ایده‌ها و با ترغیب دانش آموزان به مباحثه، نقاط کلیدی و نکات مبهم را برایشان آشکار می‌کند. همچنین حس کنجکاوی آن ها را در مسیری درست هدایت و تقویت می‌کند. علاوه بر منافع آشکار مشارکت دانش آموزان در حل مسئله، انگیزه، حس موثر بودن و اعتماد به نفس دانش آموزان نیز افزایش می‌یابد. این مطلب در بیان احساس رضایت از کلاس در هر دو دبیرستان تیزهوشان و عادی در پایان جلسات مشهود بود.

۹– ضعف ها و دام های نرم افزار

با وجود تمام مزایا و امکاناتی که نرم‌افزارهای هندسه‌ی پویا در اختیار دبیران و دانش آموزان قرار می‌دهد، در صورتی که به درستی مورد استفاده قرار نگیرد، دارای ضعف ها و معایبی است که لازم است در طرح درس و استفاده از ابزارهای نرم افزاری همواره مد نظر باشد. **ویلر** برخی از ضعف ها و دام های استفاده از نرم افزار را این گونه بیان می‌کند:

- بدون شک یکی از مهمترین دامهایی که در استفاده از این نرم افزارها وجود دارد، این است که دانش آموز به علت انجام آزمایش‌های زیاد و بررسی حالت‌های مختلف، اثبات در علوم تجربی را با اثبات و استدلال ریاضی یکسان دانسته و خود را از سطوح بالاتر تفکر و استدلال بی نیاز بداند [۲۴]. عملکرد معلم و طرح درس او باید به نحوی باشد که به سوالاتی نظیر *اینکه: چرا باید موضوعی اثبات شود که به وضوح در حالت‌های زیادی، صحت آن نشان داده شده است؟ ، من به وضوح این موضوع را مشاهده می‌کنم که صحیح است. نرم افزار درستی این مطلب را نشان می‌دهد.* پاسخ داده و از ایجاد این‌گونه بحث ها جلوگیری کند [۲۴]. یکی از راهکارهای رسیدن به این هدف استفاده از تضاد است [۲۳].

- القای این تصور به دانش آموزان که هندسه‌ی پویا یک معجون جادویی است که به تنهایی همه مشکلات درس هندسه را حل می‌کند و این درس را برای همه ساده و بی دردسر می‌سازد.

- عدم توجه به این مشکل که ممکن است وجود رنگ‌های زیبا و تغییرات پویا و وضوح مطالب ارایه شده به کمک نرم افزارها، این تصور را برای دانش آموز ایجاد کند که مطالب درسی را به خوبی فرا گرفته است، اما از آنجا که او نتوانسته است از سطح شهود به سطوح بالاتر صعود کند، یادگیری او فقط یک توهم است. چنین دانش آموزی معمولاً نمرات خوبی در ارزیابی ها به دست نمی‌آورد.

- از آنجایی که نرم‌افزار می‌تواند مقادیر زیادی اطلاعات را جمع‌آوری کرده و حالت‌های متنوع را در اختیار قرار دهد، این امر گاهی باعث می‌شود که دانش آموز در حجم وسیعی از اطلاعات غرق شده و نتواند به نکات کلیدی برسد.

- از نرم‌افزارهای هندسه پویا تنها به عنوان یک تخته سیاه مجلل و قشنگ استفاده شده و هیچ تغییری در محتوای درسی و یا شیوه‌ی ارایه آن به وجود نیاید.
- تأکید بیش از اندازه روی این که قبل از ارایه درس باید دانش آموزان در استفاده از نرم افزار تبحر عالی پیدا کنند، در این صورت دانش آموز تنها یک مهارت را می‌آموزد بدون این که کاربردهای این مهارت را یاد بگیرد. برای رفع این مشکل می‌توان درس را با استفاده از شکل های آماده که معلم تهیه کرده و در مرحله‌ی اول دانش آموز فقط باید آن ها را تغییر دهد، شروع کرد.
- نباید استفاده از ابزار و به خصوص نرم افزارهای هندسه‌ی پویا باعث شود که بعضی از مهارت‌ها و دست ورزی‌های پایه به طور کامل به فراموشی سپرده شوند، چرا که این نوع مهارت ها در فرایند مفهومی سازی مهم هستند.

۱۰– جمع بندی و نتیجه گیری

نرم افزارهای هندسه‌ی پویا با اثر گذاری روی آموخته‌ها و ذخایر دانشی فرد، با پررنگ کردن پیوندها، نشان دادن اتصالات و برقرار کردن ارتباطات جدید بین اشیاء مختلف در شبکه‌ی ذخایر دانشی فرد و ارتقاء سطح شناخت فرد نسبت به داده‌های مسئله و دانش خود، درک و تجربه‌ی او را از مسئله غنی‌تر می‌سازند. همچنین با ارایه‌ی حالت‌های متفاوت برای یک مسئله، باعث می‌شوند که دانش آموز به این باور برسد که قبل از ارایه‌ی جواب نهایی، باید در مورد مسئله تأمل و تفکر بیشتری داشته و با تعویق قضاوت و تمرکز روی عملکرد خود، جواب و حدسی مناسب‌تر را ارایه دهد. پس از پیاده سازی حدس‌ها نیز با دادن فرصت آزمایش و مشاهده‌ی نتیجه و بازخورد آن، پالایش و پردازش حدس‌های خام را تسهیل نموده و نقطه‌ی مناسب برای حل مسئله و کنترل این فرایند را به فرد نشان می‌دهد. بر این اساس استفاده از این گونه نرم افزارها به افزایش مهارت های ریاضی دانش آموزان می‌انجامد. تدریس و یادگیری خلاق، حاصل اهمیت دادن به یادگیری خودانگیخته، روش‌های آموزشی انعطاف پذیر با رویکرد پرسشگری و به چالش کشیدن و نهایتاً دست‌ورزی به کمک ابزار است. در نهایت باید در کنار امکانات فراوان هندسه‌ی پویا که چشم انداز وسیعی را برای تدریس هندسه فراهم کرده است، به این نکته هم توجه داشت که این ابزار دارای ضعف‌ها و کاستی‌هایی نیز هست. لذا لازم است معلّمان و طراحان محتوای درسی با شناسایی این ضعف ها، با هوشمندی و در نظر گرفتن مقدمات لازم، از این مشکلات اجتناب و مسیر پیشرفت سریع تر را برای دانش آموزان فراهم کنند.

۱۱– پی نوشت

[۱] پولیا، حل مسئله را در چهار مرحله‌ی درک مسئله، انتخاب راهبرد، پیاده سازی آن و بازگشت به عقب دسته‌بندی می‌کند.

[2] Polya
[3] Problem Posing
[4] Laborde
[5] Cabri Geometry

[۶] Dragging : "درگ" در این مقاله به معنی "کشیدن" یک راس یا ضلع از اشکال هندسی و ایجاد تغییر در ظاهر یا موقعیت آن در نظر گرفته شده است. اما استفاده از واژه‌ی کشیدن در هندسه، معنی ترسیم شکل را به ذهن متبادر می‌کند. لذا در این مقاله از ترجمه‌ی واژه ی درگ استفاده نشده است.

[7] Schoenfeld
[8] Heuristics
[9] Vygotsky
[10] Hollebrands
[11] Calder
[12] Hadas
[13] Arcavi
[14] Arzello
[15] Wandering Dragging
[16] Dragging Test
[17] Invariant
[18] Lieu muet Dragging
[19] Reactive
[20] Proactive
[21] Whiteley
[22] Gary
[23] Aarnes
[24] Yerushamly
[25] Coce
[26] Goldenberg
[27] Beleck
[28] session
[29] Schema

[۳۰] مسئله ۱: اگر اضلاع دو زاویه دو به دو بر هم عمود باشند، در مورد اندازه این دو زاویه چه می‌توان گفت [۱۹]؟

[31] مسئله ۲: وسط‌های اضلاع یک چهار ضلعی را به هم وصل کرده‌ایم، رابطه‌ی قطرهای چهار ضلعی اولیه را با چهار ضلعی حاصل بررسی کنید [۲۰].

[32] مسئله ۳: وسط‌های اضلاع یک مثلث و پای یک ارتفاع چه شکل های را می‌سازند [۲۱]؟

[33] مسئله ۴: راس مربعی بر مرکز مربع دیگری منطبق است. مساحت قسمت مشترک را بیابید [۸].

[34] مسئله ۵: روی هر یک اضلاع یک متوازی الاضلاع یک مربع ساخته می‌شود، مراکز این مربعات چه شکلی را می‌سازند ؟

[35] مسئله ۶: مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع را بیابید.

[36] در حالتی که مساحت قسمت مشترک ۱/۴ مربع بزرگ می‌شود نیز اثبات به روش مشابه است.

[37] مسئله ۷: مثلث ABC (شکل۱۳) متساوی الاضلاع است، نقطه‌ی M روی خطی موازی قاعده‌ی BC که از گرانیگاه آن می‌گذرد، جابجا می‌شود. از این نقطه به سه ضلع عمود می‌کنیم. پای عمودها را $D\ ,F\ ,E$ می‌نامیم. نشان دهید $MD=1/2(MF+ME)$ [۲۲].

مراجع

[۱] ریحانی ا." *هندسه گره‌ها و آموزش آن در مدرسه* ". فصل‌نامه فناوری و آموزش. جلد اول، شماره۴، تابستان، **۱۳۸۶**.

[۲] فرمهر ف.، ریحانی ا. و مسگرانی ح.،"*تجربه حل مسئله هندسه در محیط پویا – یک مطالعه موردی*"، مقاله برگزیده دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، **۱۳۸۷**.

[3] King J. and Schattschneider D.,"*Geometry Turned On: dynamic software in learning, teaching, and research* ", MAA., **1997**.

[4] Laborde C., "*Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry*", International Journal of Camputer for Mathmatical Learning, Vol. 6, pp.283-318.

[5] Rosselle M., Grandbastien M., "*Toward Interoperable ILES: Results from a Case Study in the E Geometry Domain*", France, **2003**.

[۶] فرمهر ف.، ریحانی ا.، "*جایگاه نرم افزارهای هندسه‌ی پویا در آموزش هندسه‌ی دبیرستان*"، نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، **۱۳۸۶**.

[7] Bell M.D., "*Impact of an inductive conjecturing approach in a dynamic geometry-enhanced environment*", Georgia State University, **1998**.

[8] Schoenfeld A.*H."Mathmatical Problem Solving*", Acadmic Press.Inc, **1986**.

[۹] پولیا ج.،"خلاقیت‌ریاضی"،[مترجم] شهریاری،پ. انتشارات فاطمی، **۱۳۸۵**.

[۱۰] ترابی م.،"*مقایسه آموزش قضیه تالس در کتابهای ریاضی ایران و فرانسه*"،رشدآموزش ریاضی، شماره۹۰، **۱۳۸۶**.

[11] Hollebrands k.,"*The Role of a Dynamic Software Program for Geometry in Strategies High School Mathematics Students Employ*", North Carolina State University, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 38, **2007**.

[12] Alcavi A. and Hadas N., "*Computer Mediated Learning: an Example of an Approach*", Rehovot,Department of Science Teaching Weizmann Institute of Science, **2001**.

[13] Whiteley W.,"*Dynamic Geometry Programs and the Practice of Geometry*", York Universit, Toronto, Ontario, Canada , **2000**.

[14] King J. and Schattschneider D., "*Geometry Turned On: dynamic software in learning, teaching, and research*", MAA., **1997**.

[15] Christou C. & et al., "*Problem Solving and Problem Posing in a Dynamic Geometry*", Cyprus, TMME, Vol. 2, **2005**.

[16] Yerushalmy M., "*Generalization in geometry*", Lawrence Erlbaum Assoc, **1993**.

[17] Laborde C., "*Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving*", University Joseph Fourier and University Institute for Teacher Education, Grenoble, France, **2000**.

[18] Steketee S., "*Do the Wave: Trigonometry Comes Alive with Sketchpad* ", Key Curriculum Press, NCTM Annual Meeting, **2008**.

[۱۹] گروه مولفان دفتر برنامه ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، (هندسه ۲)، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، **۱۳۸۵**.

[۲۰] رستمی م-ه.، (دایره المعارف هندسه) جلد یک، انتشارات مدرسه، **۱۳۸۶**.

[۲۱] اخباریفر م.، (کتاب کار و راهنمای مطالعه دانش آموز هندسه ۱)، موسسه فرهنگی فاطمی، **۱۳۸۲**.

[22] Forsythe S., "*Learning Geometry through Dynamic Geometry Software*", Mathematics Teaching Academic Research Library, **2007**.

[23] Hadas N., Hershkowitz R. and Schwarz B.B., "*The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need To Prove in Dynamic Geometry Environment*", Educational Studies in Mathematics, Vol. 44 (1&2), **2000**, pp. 127-150.

[24] De Viller M., "*Some pitfalls of dynamic geometry software*", Kennesaw State University, USA , University of KwaZulu-Natal, School of Science, Mathematics & Technology Education, Edgewood Campus, **2007**.