هندسه گره ها و آموزش آن در مدرسه

ابراهیم ریحانی*

چکیده

هندسه اقلیدسی طی سالیان متمادی به دانش آموزان در مدارس آموزش داده شده است. ساختار های توپولوژیکی از جمله موضوع‌هایی هستند که چندان در هندسه مدرسه ای مورد توجه نبوده اند. گره یکی از موضوع‌های مناسب برای آموزش در مدرسه است که دارای ساختاری توپولوژیک است. گره ها افزون بر آنکه ریشه در فرهنگ و تجربیات انسانی دارند، به عنوان زمینه ای نظری و کاربردی در ریاضیات، فیزیک، زیست شناسی و شیمی مطرح هستند. در این مقاله ابتدا پس از آشنایی مختصر با گره ها توضیحی برای عنوان "هندسه گره ها" بیان می‌شود. در قسمت اصلی مقاله در بخش اول دلایل و تحلیل ها برای انتخاب گره ها و اهمیت آموزش آن در مدرسه تشریح شده و در بخش دوم به طور فشرده طرحی پیشنهادی در مورد آموزش هندسه گره ها به دانش آموزان ارایه شده است. اجرای آزمایشی این طرح که یک از گروه دانش آموزان دوره های ابتدایی و گروهی دیگر شامل دانش آموزانی از سال سوم راهنمایی و سال اول متوسطه در آن شرکت داشته اند، نتیجه های اولیه رضایت بخشی به همراه داشته است.

واژه های کلیدی: آموزش هندسه، توانایی فضایی، گره ها ، ساختارهای توپولوژیکی

مقدمه

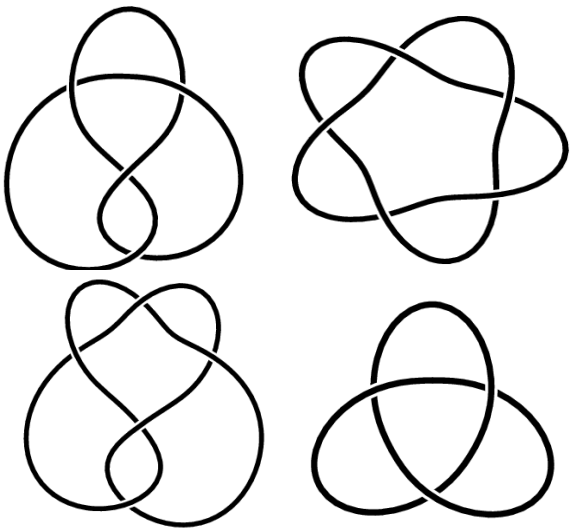
یکی از مهم ترین هدف های آموزش هندسه رشد توانایی فضایی[1] دانش آموزان است[۲]. با اقرار و تأکید بر اهمیت هندسه اقلیدسی در آموزش مدرسه ای به نظر می‌رسد که اتکای تنها به آن برای رشد توانایی فضایی کافی نیست. اکنون هندسه دچار تحول گشته و ایده های هندسی توسعه و گسترش یافته است. در سال های اخیر ایده های هندسی به دلیل کاربرد های جدید آن در ریاضیات و علوم دیگر مورد توجه و علاقه بسیاری از آموزشگران بوده است. با تعاریف و تعابیر جدیدی که از هندسه به عمل آمده است، هندسه در برگیرنده پدیده های بصری متفاوتی می شود. از طرف دیگر، شرایط متفاوت قرن حاضر باعث شده است که تجربه های بسیار غنی و با ارزشی در یک طیف گسترده از شکل‌های فضایی در اختیار دانش آموزان قرار گیرد که در هندسه مدرسه ای یافت نمی‌شود. یک پیشنهاد برای بهینه سازی و اصلاح برنامه درسی هندسه وآموزش هندسه در جهت رشد توانایی فضایی، گسترش "ساختار"، "گوناگونی" و "تعداد" شکل‌های و اجسام و تصویرهای مورد استفاده در فرایند آموزش است. ساختارهای توپولوژیکی از جمله موضوعاتی هستند که چندان در هندسه مدرسه ای مورد توجه نبوده اند[۱]. در بین ساختارهای توپولوژیکی، گره ها[2] از انعطاف و اهمیت ویژه‌ای برای آموزش برخوردارند. گره ها هم درعالم واقعی (فضای حقیقی) و هم در فضای نظری (نظریه ریاضی گره ها) شناخته شده و دارای جایگاهی ویژه هستند. گره ها افزون بر این که یکی از نظریه های جدید و پیشرفته ی ریاضی هستند[۴] و [۲۰]، بخش مهمی از

* استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
پست الکترونیکی: e_reyhani@srttu.edu

1. Spatial ability
2. Knots

تاریخ و فرهنگ و تمدن بشری را نیز به نمایش می گذارند. یافته های مستند، زمان استفاده از نوعی گره معینی را حدود ۹۰۰۰ سال قبل می‌داند [۳]، در حالی که عمر نظریه ی ریاضی گره نزدیک به یک قرن است.

در مقاله حاضر پس از آشنایی مختصر با گره ها ابتدا به بیان چرایی انتخاب گره ها برای آموزش به دانش آموزان می پردازیم و در ادامه رئوس کلی طرح پیشنهادی شیوه آموزش گره ها را ارایه می کنیم. شاید بتوان گفت که این طرح تلاش می کند پلی رابین دنیای واقعی و تجربی به دنیای ریاضی یا نظریه‌ی ریاضی گره ها برقرار کند. افزون بر این، طرح مذکور سطوح متفاوت تحصیلی در مدرسه را شامل می شود و درآن دانش آموز باشروع از دنیای واقعی و محسوسات به تدریج به سمت ایده های مجرد و نظری حرکت می کند.



شکل ۱ نمودار تعدادی از گره های ریاضی

گره چیست ؟

گره ها به طور مؤثری با فعالیت های عملی انسان- از کودکی تا پیری- ارتباط دارند. گره ها به عنوان یک مؤلفه فرهنگ انسانی طی چند هزار سال شناخته شده هستند. بسیاری از بچه ها حتی قبل از آن که خواندن و نوشتن رایاد بگیرند، گره زدن رایاد می‌گیرند. در فرهنگ های متفاوت گره دارای ارزش و جایگاه ویژه خود می باشد. در زندگی روزمره ودر امور حرفه ای گره ها همواره به کمک ما می‌شتابند. آنها در دریانوردی، کوهنوردی، ماهیگیری، عملیات امداد و نجات، جراحی، پزشکی، بافندگی و موردهای زیاد دیگر به کار می آیند. اگر چه گره ها بشر را در طول قرن ها همراهی کرده اند، لیکن نظریه ریاضی گره هاعمر چندانی ندارد. در ریاضیات گره یک منحنی بسته در فضاست که خودش را قطع نمی کند، به عبارت دیگر هر منحنی ساده بسته درفضا یک گره است. در شکل ۱ تعدادی از گره های ریاضی نشان داده شده اند.

از نظر تاریخی انگیزه اولیه مطالعه علمی گره در شیمی ایجاد شد[۴]. در دهه ۱۸۸۰ اعتقاد بر این بود که یک ماده اساسی به نام اتر[1] همه فضا را پرکرده است. کلوین[2] (۱۹۷۰-۱۸۲۴) همسو با این نظریه، مدلی را پیشنهادکرد که در آن گره های متفاوت، معرف عنصرهای گوناگونی می شدند. ایده کلوین در ۱۸۸۷رد شد و به تقریب برای حدود تایک قرن بعد شیمیدان ها علاقه ای به مطالعه گره ها نشان ندادند. اما ریاضیدان‌ها آنها را رها نکردند و به تحقیق و مطالعه پیرامون گره ها ادامه دادند وآن را به یکی از جذاب‌ترین و جالب‌ترین بخش‌های ریاضیات تبدیل کردند. در دهه ۱۹۸۰ بیو شیمیدان‌ها ساختار گرهی را در مولکول‌های DNA کشف کردند. در سال های اخیر شیمیدان‌هایی برده‌اند که امکان خلق مولکول‌هایی به صورت گره، به شکلی که نوع گره خواص مولکول را تعیین کند، وجود دارد. بهر حال مدل نادرستی که برای اتمها متولد شده بود اکنون دارای کاربردهای مهمی در زیست شناسی، فیزیک و شیمی است [۴] .

[1] . Ether
[2] . Kelvin

نظریه‌ی گره بخشی از ریاضیات است که توپولوژی نامیده می شود. توپولوژی مطالعه ویژگی های هندسی اشیا است که در اثر تغییر شکل[1] ، ثابت می مانند. واضح است که یک گره ریاضی با یک گره معمولی تفاوت زیادی دارد. اما آیا می توان بین آنها پلی ایجاد کرد ؟ چه فوایدی حاصل از این ارتباط برای آموزش مدرسه ای وجود دارد؟ این کار چگونه باید انجام شود؟ در این مقاله سعی می کنیم به این پرسش ها پاسخ دهیم. اجازه دهید قبل از آن توضیح دهیم که چرا عنوان "هندسه گره ها"را برگزیده ایم.

چرا هندسه گره ها ؟

دیدگاه های جدید و تعاریف اخیر در مورد هندسه و پدید آمدن هندسه های جدید، افزون بر گسترش دامنه‌ی هندسه این امکان را فراهم می‌کند که موضوع گره ها را تحت عنوان "هندسه گره ها " برای آموزش در مدارس مطرح کنیم.

کلاین[2] در سال ۱۸۷۰ هندسه را یک فضا همراه با گروهی از تبدیل های به توی خودش تعریف کرد. هندسه دان خواصی را مطالعه می کند که تحت این تبدیل های پایا[3] هستند. طبق تعریف کلاین هندسه های متفاوتی وجود دارند که یک هندسه سلسه مراتبی[4] را تشکیل می دهند که از هندسه اقلیدسی شروع و تا هندسه های تصویری (تصویر موازی[5] وتصویر مرکزی[6]) ادامه و به توپولوژی ختم می شود [۱] .

از سوی دیگر تعریف های هندسه در سال های اخیر به طور کامل متحول شده است. جونز[7] به نقل از زیمان[8] هندسه را در بردارنده آن شاخه هایی از ریاضیات می داند که درک و بینش بصری (مسلط ترین حس ما) را برای یاد آوری قضایا، فهم اثبات، القای حدس و درک واقعیت، به کار می گیرند و به مابصیرت کلی می دهند [۱] .

دل گراند[9] (۱۹۹۰) به نقل از پدرسون[10] تعبیر زیر از هندسه را ارایه کرده است: "هندسه مهارت چشم ها و دست ها است همان قدر که مهارت تفکر است " [۵]. به نظر می رسد که هندسه به ویژه در مدارس ابتدایی باید آن چیزی باشد که دانش آموز تصور می کند، انجام می دهد ویامی سازد نه به طور صرف آن چیزی که می نویسد.

نظر بیشاب[11] (۱۹۸۳) در مورد هندسه که بنی[12] آن را ذکر کرده است، نیز مفید به نظر می رسد : "هندسه مطالعه اثبات ها نیست . هندسه مطالعه را بطه های فضایی است که می توانند درفضای سه بُعدی که در آن زندگی می کنیم و در هر سطح دو بُعدی از این فضای سه بُعدی، یافت شوند "[۶] .

چشم اندازی که در پیشگفتارهای کتاب های هندسه (۱) و هندسه (۲) دوره متوسطه ارایه شده است نیز دلیل مناسبی است بر این که چرا نام "هندسه گره ها "را برگزیده ایم . در این کتاب ها از هندسه با تعبیرهای زیر ذکر شده است :

- هندسه علم شناخت دنیایی است که در آن زندگی می کنیم .
- هندسه روش نمایش مفاهیم و فرایندهای شاخه های متفاوت ریاضی و علوم است .
- هندسه نقطه تلاقی بین ریاضی به عنوان یک علم مجرد و ریاضی به عنوان یک علم تجربی، شهودی است .
- هندسه مدل ساز پدیده های طبیعی است .
- هندسه تمثیلی برای یاد دادن و یاد گرفتن استدلال استنتاجی است .
- هندسه وسیله‌ی مؤثر و مفید در ارایه کاربردهای بدیع و خلاق است.

گره ها مصداقی برای بیشتر موردهای ذکر شده دراین قسمت هستند. آنها از یک سو ریشه در تجربه های

[1] . Deformation
[2] . Klein
[3] . Invariant
[4] . Hierarchy
[5] . Parallel projection
[6] . Central projection
[7] . Jones
[8] . Zeeman

[9] . Del grande
[10] . Pederson
[11] . Bishop
[12] . Bennie

بشری دارند و از سوی دیگر بخشی از ریاضیات مدرن و امروزی هستند. در نتیجه شاید یکی از بهترین موضوع های برای نشان دادن فرایند حرکت از شهود به تجرید موضوع گره ها باشد. در سطوح ابتدایی دانش آموزان با تکیه بر مشاهده، گره زدن (ساختن گره)، بازی ودست ورزی با گره ها و به طور کلی فعالیت های عملی مختلف با آنها، به تقویت " مهارت دست ها " و هماهنگی چشم و دست می پردازند. در گامهای بعدی با نمایش نمودار گره ها در روی کاغذ به مفهوم اولیه ای از مدل سازی ریاضی و سطح ساده ای از تجرید می رسند و در ادامه به تدریج وارد دنیای ریاضی می شوند. در کنار اینها با یادگیری کاربرد های گره های متفاوت به شکل مناسبی امکان درک ارتباط بین زندگی واقعی و ریاضیات برای دانش آموزان فراهم می شود.

اهمیت آموزش "هندسه گره ها " در آموزش مدرسه‌ای

در حال حاضر موضوع های هندسی متفاوتی برای تدریس داریم و به نظر نمی رسد که هیچکدام از آنها به تنها یی بتواند اهداف آموزش هندسه را برآورده سازد. یک پیشنهاد می تواند انتخاب مجموعه‌ای از آنها باشد. در این بخش به این پرسش پاسخ می دهیم که چرا گره ها می توانند به عنوان یکی از انتخاب های مناسب مطرح باشند. دلایل ما به قرار زیر است:

۱- گره ها ویژگی های یک هندسه مناسب را دارند

هر چند این سؤال که "چگونه هندسه ای ،یک هندسه مناسب به شمار می رود ؟" پاسخ ساده ای ندارد، اما همواره مورد بحث و مطالعه بوده است. هیچ دیدگاه و نظریه عمومی در مورد این که چه مواد آموزشی را باید در یک برنامه درسی هندسه گنجاند و چه چیزهایی را باید حذف کرد، وجود ندارد. با این حال تعدادی از الزامات طبیعی در مورد ویژگی‌های مواد آموزشی مناسب برای هندسه- که تاحد زیادی مورد توافق عمومی هستند - را می‌توان بر شمرد. این مواد باید :

"- تنها به تعریف ها و اثبات ها تکیه نکنند بلکه باید به شکل ها، فضا و حرکت نیز تکیه کنند.
- نه تنها بر فضای دو بُعدی، بلکه بر دنیای سه بُعدی که در آن زندگی می کنیم نیز استناد کنند .
- در سطوح مقدماتی بویژه برمبنای کم نوشتن وزیاد درست کردن وساختن باشند.
- تفکرمنطقی را رشد دهند.
- رابطه بین ریاضیات وموضوع های دیگررا نشان دهند.
- توانایی فضایی دانش آموزان راافزایش دهند.
- مهارت های لازم برای کارهای حرفه‌ای و زندگی روزمره را رشد دهند.
- بتوانند همه دا نش آموزان و نه فقط تیز هوش ها را به کار با شکل و فضا وادار کنند"[۷]و[۸].

هندسه گره ها وآموزش آنها بیشتر این الزامات را برآورده می‌سازد. گره‌ها اشیای واقعی هستند که با آنها حرکات واقعی راانجام می دهیم. آنها از یک سو بر مبنای قوانین فضای سه بُعدی است و از سوی دیگر با رسم نمودار آنها درروی کاغذ از قوانین فضای دو بعدی پیروی می کنند. گره‌ها به ویژه در گامهای نخست ابزاری هستند که برای یادگیری آنها دانش آموزان لازم نیست چندان به نوشتن فرمول بپردازند، بلکه لازم است با دست هایشان کارکنند، ترسیم کنندوتصور کنند. بایادگیری تعداد محدودی گره و کاربرد آنها دانش آموزان می توانند مهارت‌های لازم برای کارهای حرفه ای و زندگی روزمره را رشد دهند.

۲- طراحی فعالیت های مناسب ریاضی با گره هابه خوبی امکان پذیراست

آموزش هندسه گره‌ها به شکل مطلوبی دانش آموزان رادرگیر فرایند مشاهده، فرضیه سازی، حدس زدن، اثبات کردن، ردکردن، نتیجه گیری، توضیح دادن و مانند آن می کند. دانش آموزان همراه با گره زدن و بازی با آن به وسیله‌ی مشاهده، به برخی از ویژگی های آن پی می برند. با بیان روش خود در مورد گره‌هایی که ساخته اند و ذکر ویژگی های آنها درگیر توضیح دادن می‌شوند. هنگام

ساده کردن نمودار گره ها و رنگ آمیزی آنها و نیز بسیاری از موقعیت های دیگر درگیر حدس زدن و در ادامه اثبات می شوند. مسایل جذاب و دشوار مربوط به گره ها و در عین حال که ساده فهم هستند، به روحیه مبارزه طلبی بچه ها پاسخ می دهد. لایه های متفاوتی از استدلال استنتاجی در کار باگره ها دیده می شود. مربوط بودن گره‌ها به زندگی واقعی و در برداشتن مؤلفه های فرهنگی، اجتماعی و تاریخی از ویژگی های دیگری است که طراحی فعالیت های مناسب ریاضی را با آنها امکان پذیر می سازد. مدل سازی ریاضی به شکل خو بی در هندسه گره ها قابل درک است.

۳- امکان آموزش هندسه گره ها در همه پایه های تحصیلی وجود دارد

آموزش هندسه گره ها را می توان به تقریب از پایین ترین سطوح (دانش آموزان ۱۰-۹ ساله) شروع کرد. در ازمایشی که حدود ۳۰ دانش آموز از پایه های دوم تا پنجم ابتدایی درآن شرکت داشتند، تنها دانش آموزان پایه دوم در انجام فعالیت با گره ها دچار مشکل بودند [21]. آموزش در سطوح پایین تر شهودی تر و به تدریج با افزایش قدرت تجرید دانش آموز به سوی ریاضیات و به طور دقیق‌تربه سوی نظریه‌ی ریاضی گره سوق داده می شود. یکی ازمشکل ها ی آموزشی آن است که، اگر دانش آموز بدون آن که توانایی کار با عنصرهای واقعی دنیای مادی را داشته باشد، تنها با عبارت های که این مواد را نمایش می دهند درگیر شود، به طور طبیعی ارتباط بین عنصرهای متناظر و عبارت هایی نمایش دهنده آنها از دست می‌رود. بنابراین شیوه‌ی آموزش، یعنی حرکت از شهود به تجرید باعث حفظ ارتباط طبیعی بین گره ها به عنوان اشیایی واقعی و تعبیرهای نمایش دهنده آنها و مدل های ریاضی آنها می شود.

۴- بخش هایی ازمسیر ساخته شدن یک نظریه‌ی ویژه را ترسیم می کنند

آموزش گره ها در یک سطح مقدماتی این امکان را فراهم می آورد که دانش آموزان درک کنند یک نظریه‌ی ریاضی مانند گره ها، به چه شکل ساخته شده است. صرف نظر از اینکه در اصل طرح نظریه‌ی گره ها- آن گونه که در ریاضیات عالی وجود دارد- در سطح مدرسه امکان پذیر نیست، با این حال تا حدی می توان در مدرسه به دانش آموزان نشان داد که ریاضیدان‌ها چگونه این موضوع را مطالعه می کنند و با چه عبارت ها و بیان هایی دانش خود را شکل می دهند . دانش آموزان یاد می گیرند که برای مطالعه گره ها می توانند تعدادی از آنها را درست کنند، به آنها با دقت توجه کنند، ویژگی ها ساده آنها را بیابند، و از این ویژگی ها به هنگامی که گره های پیچیده تر را مطالعه می‌کنند، برای طبقه بندی آنها استفاده کنند. آنها در می‌یابند که با مشاهده دقیق تر دنیای اطرافشان امکان کشف حقایق بسیاری برایشان وجود دارد.

۵- شروع مطالعه ی نظریه‌ی گره ها پیش نیاز چندانی لازم ندارد

مقدار زیادی از نظریه‌ی گره ها برای خیلی از افراد قابل دسترسی است و نیاز به ریاضیات سطح بالا ندارد. بنا براین آموزش گره ها در شروع برای بیشتر دانش آموزان امکان پذیر است. افزون بر این، برخلاف اکثر موقعیت هایی که در دیگر شاخه های ریاضیات حاکم است، بسیاری از مسائل حل نشده در این حوزه به سادگی فرمول بندی می شوند و حتی برای مبتدی ها نیز قابل فهم است و این احتمال وجود داردکه توسط غیر حرفه ای ها هم حل شود. تعدادی از این مسائل را در [۴] میتوان یافت.

۶- موجب آشنایی دانش آموزان با هندسه غیر اقلیدسی و غیر اصل موضوعی می شود

گره‌ها می توانند دانش آموزان را با نوعی هندسه غیر اقلیدسی یا به طور دقیق تر با هندسه ای که دارای

ساختاری توپولوژیک است آشنا کنند . به سختی می توان موضوعی دیگر را یافت که هم قابل دسترس برای دانش آموزان باشد و هم دارای ساختاری غیر اقلیدسی باشد. افزون بر این هندسه اقلیدسی، اصل موضوعی است و بنا کردن ساختمان هندسه اقلیدسی بر مبنای این اصول موضوع چندان ساده نیست. در حالی که هندسه گره ها نوعی دیگر از هندسه که غیر اصل موضوعی است، را در معرض دید دانش آموزان قرار می دهد.

۷– گره ها وسیله‌ی مناسبی برای روش بحث در گروهای کوچک می باشد

آموزش گره ها همانند بسیاری از موضوع های دیگر ریاضی در گروه های کوچک قابل حصول است. روش کار که توسط نگارنده به شکل آزمایشی اجرا شده است، در [21] شرح داده شده است. اما نکته جالبی که در برخی از مسایل مرتبط با گره ها وجود دارد اینست که آنها به طور صرف با کار جمعی به وسیله اعضای یک گروه قابل حل است. گره های انسانی[1] از این دست هستند. برای ساختن گره های انسانی می توان از چند دانش آموز استفاده کرد و تنها موقعی مسأله حل می شود که هر فرد گروه حرکت خود را درست انجام دهد .گره های انسانی می توانند این واقعیت را به دانش آموزان القا کنند که مسایل جمعی و مشکل هایی که به یک جامعه مربوط است را باید با همفکری و به طور دسته جمعی حل کرد. در حل گره های انسانی، دانش آموزان به طور شایسته‌ای درگیر فرایند "همکاری "می شوند.

۸– کار با گره ها آسان است .

یادگیری گره زدن چندان دشوار نیست. کتاب های مناسبی در مورد کار با گره ها در زندگی عادی و به ویژه زندگی حرفه‌ای وجود دارند [۳]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲] و [۱۹]. از مواد چیزی به جز طناب معمولی یا ریسمان یا نخ و مداد و کاغذ لازم نیست .گره ها به راحتی قابل نمایش در کلاس درس، روی کاغذ، و یا هر مکان دیگری است. دانش آموزان سنین متفاوت با تبدیل و تغییر گره با دست های خودشان می توانند به تجربه کردن با گره ها بپردازند. افزون بر کتاب‌های موجود، فراورده های نرم افزاری و صفحه های اینترنت نیز منابع خوبی را برای آشنایی و تجربه با گره ها فراهم آورده اند. برای دیدن یک مجموعه از سایت های مناسب [۱۳] و برای کار با یک نرم افزار جالب [۱۴] را ملاحظه کنید.

۹– ایجاد ائتلاف بین دید شهودی و ساختار حسی و حرکتی می کند

مشاهده سهم ویژه ای در کار با گره ها دارد. همان طور که می دانید علم شیمی از جدول مندلیف شروع نشده است، زیست شناسی از طبقه بندی شروع نشده است، تاریخ از ثبت کردن و هندسه از اصول موضوع شروع نشده‌اند. شروع هر یک از اینها از حقایق مشاهده شده در دنیای مادی بوده است .هندسه گره ها این امکان را فراهم می آوردکه هنگام آموزش بتوان بر به کارگیری و ائتلاف مؤثر تصور بصری (دید شهودی) و ساختار حسی و حرکتی تکیه کرد. هندسه گره ها تمرین عملی مناسبی برای گذر از شهود به تجرید می باشند.

۱۰– ارتباط های درونی و بیرونی ریاضیات را نشان می دهد

نظریه‌ی گره ها حتی تا آن مقدار که در سطح مدرسه ای قابل آموزش است می تواندتا حدودی رابطه‌ی درونی بخش هایی از ریاضیات را به دانش آموزان نشان دهد. این دستاورد به سختی در موضوعی دیگر قابل حصول است. نظریه‌ی گره ها فرصتی با ارزش را فراهم می کند که در جریان آن، دانش آموزان می توانند ارتباط بین هندسه، توپولوژی، جبر، نظریه اعداد و ترکیبیات را هر چند در سطحی ابتدایی ملا حظه کنند. از طرف دیگر امروز نظریه‌ی گره دارای کاربردهای مهمی در زیست شناسی ، فیزیک و شیمی است. این کاربردها می توانند رابطه‌ی بیرونی نظریه‌ی گره با دیگر شاخه های علوم را به تصویر بکشند.

[1] . Human knots

برای مرور قسمتی از این کاربردها [۴] و [۱۵- ۱۶] را ملاحظه کنید.

با مطالعات بیشتر می توان به جنبه های دیگری از اهمیت و ارزش آموزش هندسه گره ها در مدرسه دست یافت. بدون تردیدافزایش قدرت استنتاج و استدلال ریاضی نیز از جمله دستاوردهای آموزش این موضوع است . جایگاه خاص گره در فرهنگ غنی ایران خود بحثی جداگانه را می طلبد .گره ها بخشی از کمبود مدلهای فیزیکی برای رشد توانایی فضایی را جبران می کنند .

روش پیشنهادی برای آموزش هندسه گره ها

این روش با ذکر جزئیات توسط نگارنده تشریح شده است [21]. در اینجا به طور مختصر در مورد نکات برجسته ی آن توضیحاتی را ارائه می کنیم.

۱-آشنایی با گره ها

از جمله بهترین راه ها برای آشنایی با گره ها وشکل گیری دیدگاه و تصور در مورد گره، فعالیت واقعی (گره زدن، باز کردن گره، بازی ها، معماها و نظایر آن) با تعدادی از گره هایی است که بچه ها می شناسند یا در جایی دیده‌اند. تجربه نشان می‌دهد که فراگیری کار با تعداد معینی گره (برای مثال حدود ده گره) خیلی از نیازهای زندگی روزمره در امور متفاوت را بر طرف می کند. دانش آموزان ضمن باز و بسته کردن گره ها و بررسی ساده ترین حالت ها به کمک معلم به ساختار شیء مورد مطالعه توجه می کنند و به این موضوع پی می برند که چه چیزهایی از عنصرهای تشکیل دهنده آن مهم هستند و آنها چه ویژگی‌های دارند؟ در مورد گره های متفاوت چه چیزهایی مشترک و چه چیزهایی متفاوت هستند. دانش آموزان با تجزیه و تحلیل موردهای ساده تر به سمت درک موارد دشوارتر حرکت می کنند. گره دستی[1] (معمولی)، گره هشتی[2] ،گره دوبل[3] ازجمله گره هایی هستند که در این مرحله دانش آموزان با آنها و کاربردشان آشنا می شوند. در شکل ۲ این سه گره متاول و ساده نمایش داده شده است.

گره دستی (معمولی)

گره هشتی

گره دوبل

شکل ۲

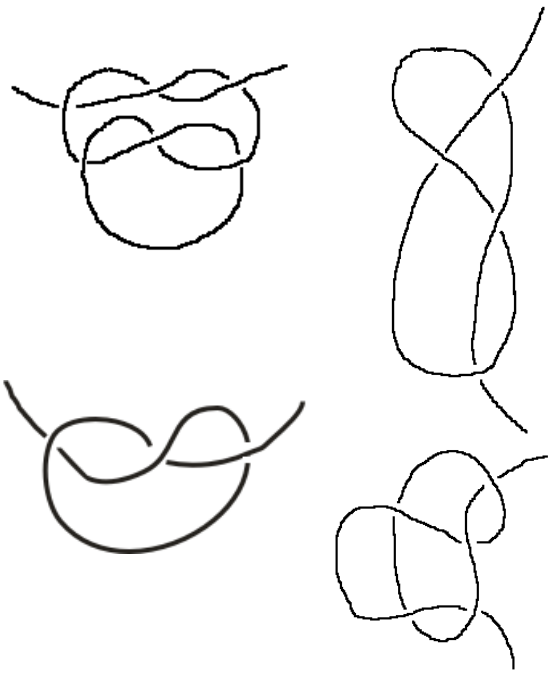
نکته مهم آن است که آشنایی دانش آموزان با گره ها به صورت طبیعی و واقعی است و از گره به عنوان یک شیء مجرد ریاضی در این سطح اسمی برده نمی شود. افزون بر این بهتر است که کار با گره در گروه های کوچک باشد تا مطالعه آن توسط دانش آموزان ساده تر باشد. درک مفهوم گره به صورت شهودی و به عنوان یک شکل فضایی در این آشنایی می‌تواند حاصل شود. کشف ویژگی های ساده گره ها توسط دانش آموزان از جمله هدف های مهم این مرحله است. برای سهولت بیشتر یکی از دانش آموزان دو سر گره ساخته شده را در دست می گیردو دانش آموز دوم ضمن مشاهده و بازی با آن در مورد ویژگی های گره توضیح

[1] . Overhand knot
[2] . Figure-eight knot
[3] . Double

می‌دهد. حرکات زیادی شامل پیچاندن، کشیدن و خمیدن مجاز شمرده می‌شود. اطلاعات، مشاهدات و برداشت ها جمع آوری و به کلاس عرضه می شود.

۲– رسم نمودار گره ها

در این مرحله دانش آموزان یاد می‌گیرند که چگونه گره سه بعدی را روی کاغذ رسم کنند. گره هایی که درمرحله یک توسط آنها ساخته شده است، می توانند مواد لازم برای این مرحله باشند. بیشتر گره ها را با رسم تصویرهایی توصیف می کنیم که نمودار گره نامیده می‌شود. نمودار گره، تصویر روی صفحه یا سایه گره است. امتداد (جهت) تصویر چنان اختیار می شود که هر نقطه روی نمودار گره، تصویر حداکثر دو نقطه از گره اصلی است. هر نقطه که تصویر دو نقطه روی گره است، تقاطع[1] نامیده می شود. تقاطع روی نمودار گره با بریدن یکی از خطوط رسم می شود تا نشان داده شود که کدام قطعه از گره در رو و کدام در زیر قرار می گیرد. در شکل ۳ نمودار تعدادی از گره ها رسم شده است .



شکل ۳ نمودار(دو بُعدی) تعدادی از گره ها

[1] . Crossing

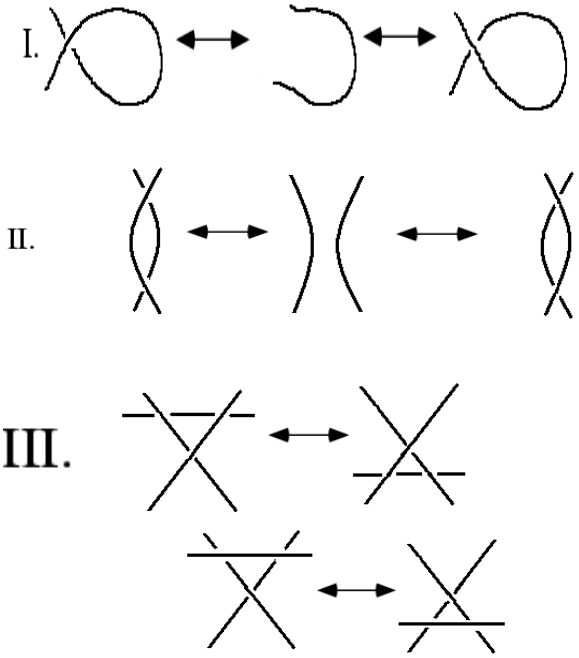
هر چند که در اینجا نیز صحبتی از ریاضیات (به مفهوم مجرد آن) به میان نمی آید، با این حال رسم نمودار گره ها توسط دانش آموزان گامی مهم برای ورود به تجرید و نیز نوعی مدل سازی ساده ریاضی به حساب می آید. برآوردهای اولیه نشان می دهد که بچه ها تقریباً از سنین ۱۰-۹ سالگی قادر به رسم نمودار تعدادی از گره های ساده هستند [21]. مقایسه بین شکل واقعی گره و نمودار دو بعدی آن به دانش آموزان در درک بهتر روابط فضایی کمک می‌کند. افزون بر این مقایسه نمودار گره های متفاوت، بیان شباهت ها و تفاوت های آنها به شاگردان کمک می‌کند که عنصرهای اصلی در یک گره را بهتر بشناسند و با برخی از خواص توپولوژیکی در یک گره آشنا شوند .

۳– مفهوم حرکت در گره ها

مفهوم حرکت در گره های واقعی شامل آن دسته تغییرهایی است که ساختار گره را تغییر ندهد. در گره هایی که از طناب ساخته می شوند به شرط آن که مجاز به بریدن نباشیم و دو سر آزاد گره توسط جایی یا کسی محکم نگه داشته شود، هر گونه بازی و جابجایی مثل خمیدن، پیچاندن، کشیدن و در هم و بر هم کردن حرکت نامیده می شود. اما اگر بخواهیم به عوض کار با گره اصلی، با نمودار آن کار کنیم چه چیزی را به عنوان حرکت روی نمودار گره تعریف می کنیم ؟

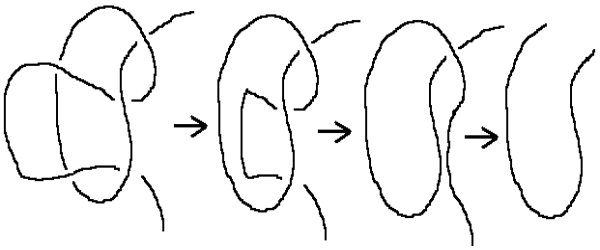
رید مستر[2] (۱۹۷۱-۱۸۹۳) در سال ۱۹۲۶ ثابت کرد که اگر دو نمودار مجزا از یک گره داشته باشیم، یکی از آنها را می توان از دیگری با یک رشته از حرکات (که به نام خود او حرکات رید مستر نامیده می شود) و ایزوتوپی های صفحه[3] بدست آورد.[۴] و [۲۱]. در شکل ۴ سه حرکت رید مستر نمایش داده شده است.

[2] . Reidemeister
[3] . Planner isotopy



شکل ۴ حرکت های رید مستر

جهت های دو طرفه نشان می دهد که می توان به صورت معکوس عمل کرد. برای مثال، در حالت اول می‌توان یک حلقه را باز کرد و یا حلقه ای را ایجاد کرد. هیچ یک از این حرکات ساختار گره را تغییر نمی دهد. هر یک از این سه نوع حرکت به نوعی به ساده ترکردن یا پیچیده ترکردن ظاهری نمودار گره منجر می شود. ساده سازی یکی از مهم‌ترین اعمالی است که در علم و زندگی مورد استفاده قرار می گیرد. به این مفهوم در ریاضیات مدرسه ای توجه ویژه ای می شود. دانش آموزان کسرها، عبارت های عددی، عبارت های جبری و مانند آن را ساده می کنند. فرایند معکوس یعنی ترکیب کردن به نوبه خود پایه و اساس بسیاری از فعالیت های غیر بدیهی است. برای مثال، مخرج مشترک گیری، رسم خطوط اضافی در هندسه و مانند آن. حرکات رید مستر هم با گره های واقعی قابل اجراست و هم با نمودار آنها. در شکل ۵ مثالی از کاربرد حرکات اول و دوم رید مسترکه دانش آموزان را درگیر یک فعالیت مناسب ریاضی می کند نشان داده شده است.



شکل ۵ کاربردی از حرکت های رید مستر

۴- رنگ پذیری گره ها

درروش پیشنهادی رنگ آمیزی یک گره در ابتدا وسیله ای برای بهتر دیده شدن ساختار گره توسط دانش آموزان است. در ادامه، رنگ پذیری گره ها به تدریج به صورت یکی از ابزارهای مهم برای پاسخ دادن به این سؤال مهم که چه موقع دوگره مساوی اند و چه موقع متفاوت اند مورد استفاده قرارمی گیرد. این همان نقشی است که رنگ پذیری در نظریه ریاضی گره ها دارد. ایده رنگ پذیری یا به طور دقیقتر ایده سه رنگ پذیری[1] توسط فاکس[2] حوالی ۱۹۶۰مطرح شده است[۱۷]. دانش آموزان در ابتدا گره های ساده را با رنگ های متفاوت رنگ آمیزی می کنند. هر قوس[3] با یک رنگ، رنگ آمیزی می شود. منظور از یک قوس یا کمان، قطعه ای از نمودار گره است که از زیر یک تقاطع تا تقاطع بعدی آن را شامل می شود. دانش آموزان در طی یک فرایند تدریجی و چند مرحله ای با رنگ آمیزی، حدس، بررسی درستی حدس خود، تنظیم مجدد و اصلاح ایده ها و هدایت و راهنمایی معلم به ایده اصلی سه رنگ پذیری می‌رسند. قاعده سه رنگ پذیری را به طور ساده می توان چنین توضیح داد: هر گاه نمودار یک گره را بتوان با سه رنگ متفاوت به گونه ای رنگ آمیزی کرد که در هر تقاطع یا هر سه رنگ دیده شود ویا اینکه یک رنگ تکرار شود، آنگاه چنین گره ای را سه رنگ پذیرمی نامیم.

نکته مهم دیگری که قابل آموزش در مدرسه است اینست که حرکات رید مستر سه رنگ پذیری را حفظ

[1] . Tricolorability
[2] . Fox
[3] . Arc

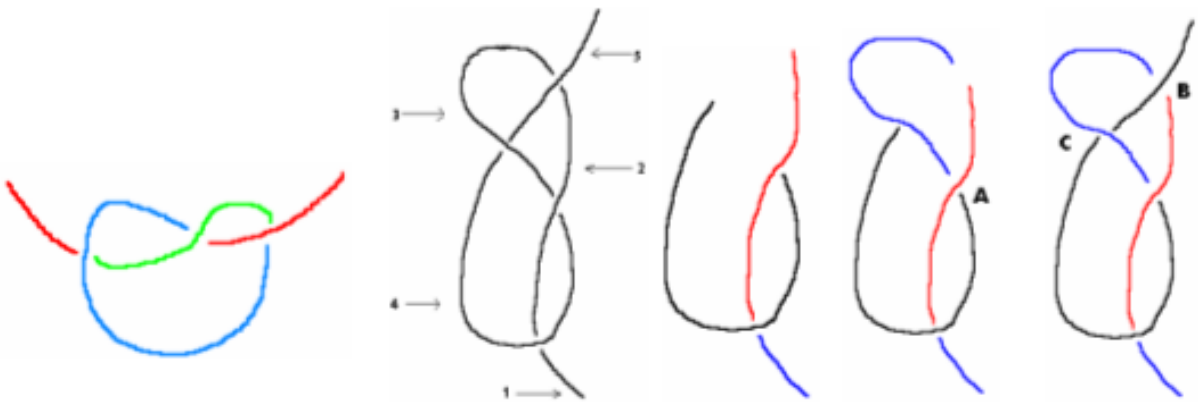
می کنند، یعنی اینکه اگر نمودار یک گره سه رنگ پذیر باشد، هر نمودار دیگر آن- که با یک رشته از حرکات رید مستر به دست می آید- نیز سه رنگ پذیر است. برای مثال، گره دستی و هر نمودار دیگر آن سه رنگ پذیر است ولی گره هشتی و در نتیجه هیچ نمودار دیگر آن سه رنگ پذیر نیست. دو گره را معادل[1] نامیم هر گاه بتوان یکی از آنها را ازدیگری به کمک یک دنباله از حرکات رید مستر به دست آورد. بنابراین، گره دستی و گره هشتی با یکدیگر معادل نیستند. یعنی آنها دو گره متفاوت از نظر ساختار هستند. در شکل ۶ سه رنگ پذیری گره دستی و عدم سه رنگ پذیری گره هشتی نشان داده شده است . برای مثال، در گره دستی دو قطعه کناری را می توان به رنگ قرمز و دو قوس دیگر را با رنگ های آبی و سبز رنگ آمیزی کرد. اما اگر در گره هشتی قطعه های ۱، ۲ و۴ را به ترتیب با آبی و سیاه و قرمز رنگ کنیم به ناچار قطعه ۳ را باید آبی رنگ کنیم. در این صورت قطعه ۵ با هیچ یک از این سه رنگ، قابل رنگ شدن (طبق قاعده سه رنگ پذیری) نیست. با استفاده از ایده سه رنگ پذیری می توان به دانش آموزان نشان داد که در واقع گره وجود دارد و گره دستی باز نشدنی است!

در سطوح بالا تر بانسبت دادن یک رابطه هم نهشتی به قوس هایی که دریک تقاطع قرار می گیرند، ایده سه رنگ پذیری به ایده k رنگ پذیری تعمیم داده می‌شود و ارتباطی ساده و جالب بین نظریه‌ی اعداد و گره ها دیده می شود. این ایده قابل آموزش در سال های آخر دوره متوسطه است.

۵– گره های ریاضی

گره ریاضی یک مفهوم مجرد است و معرفی بدون مقدمه آن برای دانش آموزان دشوار و نامناسب به نظر می‌رسد. یکی از مهمترین و در عین حال دشوارترین مراحل برای معرفی یک ایده ریاضی به دانش آموزان، تنظیم حرکت از شهود و تجربه به سوی تجرید می باشد. در روش پیشنهادی شاگردان طی فرایندی که در هر مرحله مجرد تر می شود به مفهوم ریاضی گره نزدیک می شوند.

بی اهمیت بودن ضخامت طناب، جنس آن، طول آن و نظایر آن در ساختار یک گره و در نهایت نشان دادن ضرورت اتصال دو انتهای طناب برای مطالعه گره گام هایی مهم در مجرد سازی و نزدیک شدن به یک دیدگاه ریاضی در مطالعه گره است. سپس در ادامه تمام کارهایی که با گره های معمولی و نمودارهای آنها توسط دانش آموزان انجام شده است یک دیگر با گره هایی که دیگر دو انتهای آنها به هم چسبیده است و نیز با نمودارهای آنها قابل تکرار است.



گره هشتی سه رنگ پذیر نیست

گره دستی سه رنگ پذیر است

شکل ۶

[1] . Equivalent

۶- طبقه بندی گره ها

جالب است که طبقه بندی گره ها در حالت کلی یک مسأله حل نشده است[۴]! طبقه بندی گره ها با استفاده از مفهومی به نام "عدد تقاطع"[1] صورت می گیرد که عبارت از "کمترین تعداد تقاطع موجود در بین تمام نمودارهای یک گره" است. طبقه بندی گره های از مرتبه ۳ تا ۷ تقاطع در شکل ۷ نشان داده شده است.

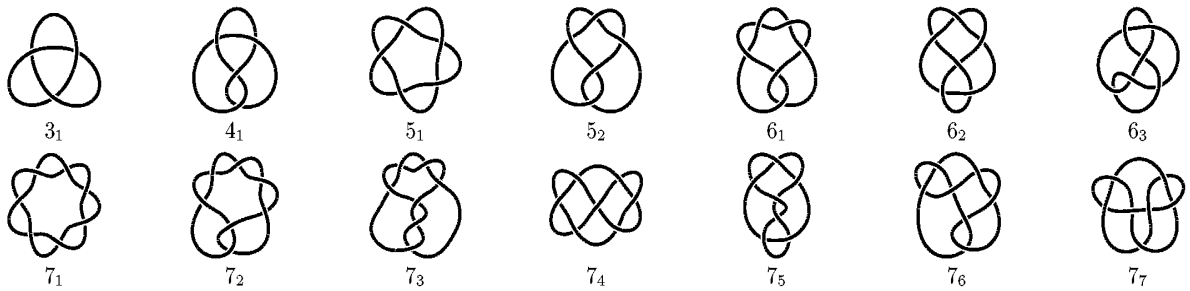
گره ای را که هیچ تقاطعی نداشته باشد گره بدیهی[2] می نامند. طبقه بندی گره های مرتبه‌ی پایین قابل آموزش در سطح مدرسه است . دانش آموزان می توانند پی ببرند که تمام گره های با ۱ و۲ تقاطع به گره بدیهی تبدیل می شوند.

۷- آشنایی با مفاهیمی از نظریه‌ی گره

برخی از مفاهیم نظریه‌ی گره مانند ترکیب گره ها[3] ، گره های اول[4]، حساب گره ها ، تصویر آینه ای[5] و تصویر معکوس[6] یک گره و تعدادی دیگر از مباحث قابل آموزش در دوره های راهنمایی و متوسطه است. برخی از کاربردهای ساده نظریه‌ی گره در شیمی، فیزیک و زیست شناسی نیز قابل طرح برای دانش آموزان است.

۸- جمع بندی

آشنایی دانش آموزان با هندسه های دیگری به جز هندسه اقلیدسی، در توسعه تفکر ریاضی آنها نقش مهمی دارد. در حالیکه ورود هندسه های غیر اقلیدسی به مدرسه به دلیل پیچیدگی آنها دشوار است، "هندسه گره ها" با توجه به ظرفیت ها و جذابیت های ویژه آن یک مورد کم نظیر است. از مزایای مهم این هندسه، قابل آموزش بودن آن در سطوح تحصیلی متفاوت است. کاربردهای گره ها در زندگی روزانه و امور حرفه ای و در علوم نقشی ممتاز به آنها داده است. افزون بر این گره ها در فرهنگ بشری و به ویژه فرهنگ غنی ایرانی – اسلامی جایگاهی با ارزش دارند. آیا می توان از کنار همه این ها گذشت؟ اگرچه ورود یک موضوع جدید به حوزه آموزش مدرسه ای نیازمند بررسی‌ها و مطالعه های و آزمایش های فراوانی است، لیکن برای شروع می توان بخش هایی از آن را در برخی از دوره های فوق برنامه و با داوطلبان علاقه مند به صورت آزمایشی اجرا کرد. در مورد گره ها استفاده از کامپیوتر ونرم افزار های مناسب که قابلیت های زیادی رابرای نمایش یک گره دارند، بسیار مفید و آموزنده است.



شکل ۷ طبقه بندی گره های از مرتبه ۳ تا ۷ تقاطع

[1] . Crossing number
[2] . Trivial knot
[3] . composition of knots
[4] . prime knots
[5] . Mirror image
[6] . Inverse image

در طرح پیشنهادی تأکید زیادی بر کار گروهی وجود دارد و مراحل آموزشی به نحوی تنظیم شده اند که امکان کشف به دانش آموز داده شود. تکیه بر شهود و تجربه و مشاهده دقیق و استفاده از آن برای رسیدن به سطح بالاتری از تجرید از نیز ویژگی های روش پیشنهادی است. نتایج چند اجرای آزمایشی این روش امید وار کننده بوده است. همچنین نظریه گره ها برای دانش آموز علاقه مند و مستعد به عنوان یک زمینه کاری جالب، قابل تعقیب در دانشگاه برای مطالعه های تکمیلی وادامه تحصیل است. شاید طرح هندسه های نو، که ریشه در تجربه های و تمدن و فرهنگ بشری دارند، این را موجب شود که دانش آموزان نیز به نگاهی نو برای شناخت دنیایی که درآن زندگی می کنند، دست یابند.

۹- منابع

منابع فارسی

[۱] ریحانی، ابراهیم. معرفی نظریه پیاژه و نظریه فن هیلی- فن هیلی در مورد یاد گیری هندسه، رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۸۰.

[۲] ریحانی، ابراهیم. چیستی توانایی فضایی، رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۸۵.

منابع انگلیسی

[3] Hopkins R., Knots (Pocket Guide Series), Thunder Bay Press, **2003**.

[4] Adams C., The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots, American Mathematical Society (September, **2004**).

[5] Del Grande, J. Spatial sense, Arithmetic Teacher Vol. 37.6, pp. 14-20, **1990**.

[6] Kate Bennie, "Shape and space", An approach to the study of geometry in intermediate phase. ttp://academic.sun.ac.za/mathed/Malati/Files/Geometry 982.pdf.

[7] Jones K., Critical Issues in the Design of the School Geometry Curriculum. Invited paper in Bill Barton(Ed), Readings in Mathematics Education. Auckland, New Zealand: University of Auckland, **2000** .
http://www.soton.ac.uk/~dkj/geompub.html

[8] Geometry Working Group, A report on the meeting at the King's College, University of London, 28't' February Convenor: Keith Jones, University of Southampton, UK, Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, **1998**.
http://www.soton.ac.uk/~dkj/bsrlmgeom/reports/K_Jones_Jan_Feb_**1998**.pdf

[9] Des Pawson Handbook Of Knots, 1998.

[10] Penn R., The Everything Knots Book: Step-By-Step Instructions for Tying Any Knot (Everything Series), **2004**.

[11] Bigon M., Regazzoni G., The Morrow Guide to Knots, **1982**.

[12] Dworth G., The Complete Book of Knots (Complete), The Lyons Press, **1997**.

[13] Knots on the Web. http://www.earlham.edu/~peters/knotlink.htm

[14] The KnotPlot Site. http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html

[15] De Witt Sumners, Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes.
http://www.ams.org/notices/199505/sumners.pdf

[16] Adams C., Furstenberg E., Li J., Schneider J., "Exploring Knots" in Mathematics Teacher, Vol. 90, No. 8, Nov. 640-646, 652, **1997**.

[17] Jozef Przytycki, 3-coloring and other elementary invariants of knots.
http://www2.mat.dtu.dk/events/uk?id=3

[18] Adams C., Why knot? : An introduction to the mathematical theory of knots, Key College Publishing, **2004**.

منابع روسی

[19] Антропов Д.М., Как завязывать узлы: 38 надежных испытанных узлов.- М.: Наука. Физматлит,**1995**.

[20] Мантуров В.О., Лекции по теории узлов и их инвариантов. - М.: Эдиториал УРСС, **2001.**

[21] Розов Н.Х., Рейхани Э., Боровских А.В. Узлы в школе. Уроки развития пространственного мышления – М.:КДУ, **2007.**