

تحلیل پایداری خطی جریان لایه مرزی دو بُعدی با استفاده از روش طیفی

محمد جواد مغربی*، مجید فیض آبادی فراهانی** واحد ضرغامی***

چکیده

نظریه های پایداری خطی، تقویت یا زوال اغتشاش های کوچک سرعت اعمال شده بر سرعت متوسط جریان را بررسی می کند. هنگامی که جریان لایه مرزی در اولین مراحل توسعه خود، به طور خطی گسترش پیدا می کند، شرایط مرزی ورودی دامنه محاسباتی با استفاده از نتیجه های حل پایداری خطی مشخص می شود. در جهت تطبیق بهتر با نتیجه های آزمایشگاهی، از تحلیل پایداری مکانی استفاده می شود. با استفاده از یک نگاشت جبری دامنه فیزیکی $(y \in [0, L_y])$ به دامنه محاسباتی $(\eta \in [0, 1])$ تبدیل می شود، برای حل معادله ی اور- سامرفیلد از روش طیفی استفاده شده است که منجر به حل مسأله مقدار ویژه شده است. در مقایسه نتیجه های آزمایشگاهی و نتیجه های تحلیل پایداری اغتشاش های به صورت مکانی و زمانی، می توان بیان کرد که تحلیل رشد اغتشاش های به صورت مکانی، ویژگی های ناپایداری جریان لایه مرزی اغتشاشی را دقیق تر توصیف می کند این امر در فرکانس های کوچک بسیار دقیق تر می باشد.

واژه های کلیدی: تحلیل پایداری خطی، جریان لایه مرزی، معادله ی اور- سامرفیلد، روش طیفی.

۱- مقدمه

است. این نظریه تقویت یا زوال اغتشاش های سرعت اضافه شده بر سرعت متوسط جریان را بررسی می کند. پیشگام ای پایداری، رینولدز^۲ (۱۸۸۳) است، چرا که برای نخستین بار او بود که فرض کرد، حالت جریان آرام که پاسخی برای معادله های دیفرانسیل دینامیکی سیال است، نماینگر نوع ویژه ای از جریان می باشد، که در محدوده معینی ناپایدار است (عدد رینولدز بحرانی) و به جریان توربولانس تبدیل می شود. مطالعه های بعدی توسط رایلی^۳ (۱۸۸۷) پی گیری شد. تلاش او به محاسبه های پیچیده ای منجر شد، لذا برای مدت زیادی روی نظریه پایداری کاری انجام نگرفت. کارهای که در ادامه کار رایلی انجام شد، در ابتدا محدود به،

در سیالات لزج می توان ثابت کرد که جریان آرام هنگامی که عدد رینولدز از مقدار بحرانی بیشتر می شود، ناپایدار می شود [۱]، ولی نمی توان آشفتگی جریان را پیش بینی کرد. لذا فقط می توان گذرش^۱ (فرایند تبدیل جریان آرام به مغشوش) را به صورت کیفی شرح داد و توصیفی از تغییرهای در زمان، مکان و حدود تغییرهای رینولدز بحرانی، برای تبدیل جریان آرام به آشفته را بیان کرد. مسأله انتقال جریان از حالت آرام به مغشوش، در سال های اخیر موضوع پژوهش های بسیاری از دانشمندان علم مکانیک بوده است. نظریه ی پایداری خطی، قدیمی ترین و توسعه یافته ترین نظریه در بررسی تعیین محل گذرش

* استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود (نویسنده مسئول)،

پست الکترونیکی: javad@shahroodut.ac.ir

** دانشجوی کارشناسی ارشد تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی شاهرود

*** دانشجوی کارشناسی ارشد تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی شاهرود

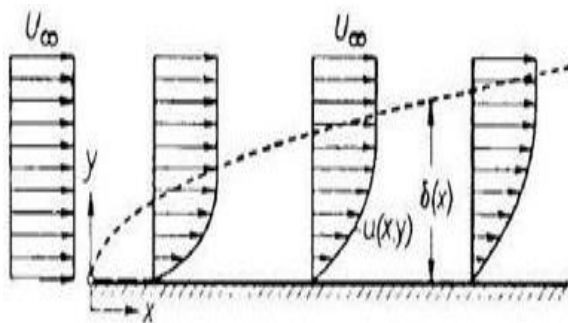
1. Transition

2. O.Reynolds

3. Lord Rayleigh

اطلاعات دقیقی در مورد مکانیسمی که منجر به ایجاد اختلال در جریان آرام و تبدیل آن به جریان مغشوش شود وجود ندارد. بنابراین، پژوهش های نوین در زمینه پدیده انتقال، بر مبنای استفاده از روش های جدید عددی و آزمایشگاهی، برای به دست آوردن فهمی دقیق از این پدیده است.

در این پژوهش، جریان مورد مطالعه از نوع جریان لایه مرزی است. وقتی سیال در مجاورت یک جسم جامد حرکت کند، تاثیر شرط عدم لغزش به صورت تنش برشی در آن آشکار می شود. با نفوذ این اثر به داخل جریان، لایه ای نازک به نام لایه مرزی تشکیل می شود که در این لایه سرعت در یک ضخامت کم از صفر تا اندازه‌ی سرعت در جریان پتانسیل خارج لایه مرزی تغییر می کند. نمای شماتیک جریان لایه مرزی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱ نمای شماتیک جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی [۱]

۲- به دست آوردن معادله های اور - سامرفیلد

نظریه تحلیل پایداری خطی بر مبنای معادله های خطی شده ناویر - استوکس است. برای این منظور فرض می شود معادله های ناویر - استوکس به وسیله مقیاس های مناسب طول و سرعت بی بعد شده اند. برای به دست آوردن معادله اور - سامرفیلد فرضیه های زیر را در نظر می گیریم:

- مولفه های سرعت و فشار را به یک مولفه متوسط، $(U(y), P(x, y))$ و یک مولفه اغتشاشی $(\underline{u}'(x, y, t), p'(x, y, t))$ تجزیه می کنیم.

جریان کوات^۱ بودند. (یعنی حالتی که توزیع سرعت در جریان بین دو صفحه (دیواره) موازی، خطی است). مطالعه های انجام شده، منجر به این نتیجه شد که چنین جریانهایی در تمام طول موج پایدار باقی می ماند. پس از به دست آمدن این نتیجه منفی برای مدتی این ذهنیت وجود داشت که روش نوسانات کوچک برای حل نظریه‌ی مسأله انتقال نامناسب است، البته پس از مدتی مشخص شد که چنین دیدگاهی حقیقت ندارد، زیرا جریان کوات یک مثال خیلی ویژه است. پس از آن بحث و بررسی با جزییات کامل تر در حالتی که اثر ویسکوزیته را به طور کامل در نظر می گرفت به وسیله‌ی سامرفیلد^۲ (۱۹۰۸)، میسز^۳ (۱۹۱۲) و هاپف^۴ (۱۹۱۴) صورت گرفت معادله های حاکم حاکم بر نظریه‌ی پایداری توسط اور^۵ (۱۹۰۷) و سامرفیلد (۱۹۰۸) به طور مستقل به دست آمد، که بعدها به معادله اور - سامرفیلد مشهور شد. معادله اور - سامرفیلد از اعمال شرایط ویژه ای از قبیل موازی و همگن بودن جریان و بسیار کوچک فرض کرد اغتشاش های بر روی معادله‌ی ناویر - استوکس حاصل می شود و چون در ابتدای جریان به طور معمول این شرایط برقرار است، می توان پاسخ این معادله را پاسخ اولیه معادله‌ی ناویر - استوکس دانست. همچنین به کمک این معادله می توان اثر پارامترهای متفاوت بر پایداری جریان را بررسی کرد. پژوهش های موفقیت آمیزی در مورد پدیده انتقال توسط شوبار^۶ (۱۹۴۷) [۲] منجر به توسعه نظریه پایداری خطی شود. توسعه نظریه ناپایداری ثانویه توسط هربرت^۷ (۱۹۸۸) [۳] صورت گرفت. پژوهش های وی باعث ایجاد یک فهم دقیق تر در چگونگی تسریع و یا به تأخیر افتادن پدیده انتقال در بسیاری از مسایل پیچیده شد. پژوهش های صورت گرفته توسط کاجانف^۸ (۱۹۹۴) [۴] بیانگر این مطلب بود که هنوز

1. Couette flow

2. A. Sommerfeld

3. R. Von Misses

4. Hopf

5. W. Orr

6. Schubauer

7. Herbert

8. Kachanov

خنثی ، $\alpha_i = \omega_i = 0$ ، که در دو حالت زمانی و مکانی دارای حل یکسان است. رابطه‌ی بین ω ، α و سرعت موج به صورت زیر است:

$$c = \omega/\alpha. \quad (7)$$

با جایگذاری معادله های (۵) و (۶) در معادله های خطی شده حرکت، معادله های زیر برای بردارهای ویژه سرعت و فشار ($\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{p}(y)$) به دست می‌آید.

$$i\alpha(U-c)\hat{u} + U\hat{v} = \quad (8)$$

$$-i\alpha\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}[\hat{u}'' - (\alpha^2)\hat{u}],$$

$$i\alpha(U-c)\hat{v} = -D\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}[\hat{v}'' - (\alpha^2)\hat{v}], \quad (9)$$

$$i(\alpha\hat{u}) + D\hat{v} = 0. \quad (10)$$

D عملگر مشتق اول در جهت عمود بر جریان (y) است. دستگاه معادله های (۸)، (۹) و (۱۰) را می‌توان به یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی به شکل زیر تبدیل کرد.

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \hat{v} = i\alpha \text{Re} \{ (U-c)(D^2 - \alpha^2)\hat{v} - (D^2 U)\hat{v} \} \quad (11)$$

که به معادله‌ی اور - سامرفیلد مشهور است.

با تعریف تابع جریان به صورت:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp(i\alpha(x-ct)). \quad (12)$$

رابطه‌ی بین تابع جریان و مولفه‌های دو بُعدی سرعت به صورت زیر خواهد بود.

$$u'(x, y, t) = \hat{u}(y) \cdot \exp(i\alpha(x-ct)) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (13)$$

$$v'(x, y, t) = \hat{v}(y) \cdot \exp(i\alpha(x-ct)) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14)$$

رابطه بین تابع ویژه (ϕ) و بردارهای ویژه سرعت و فشار عبارت است از:

$$\underline{u}(x, y, t) = U(y)\underline{i} + \underline{u}'(x, y, t), \quad (1)$$

$$p(x, y, t) = P(x, y) + p'(x, y, t). \quad (2)$$

که i بردار واحد در جهت اصلی جریان است. در معادله‌ی بالا $U(y)$ پروفیل متوسط زمانی سرعت است که با فرض موازی بودن جریان تنها در جهت اصلی جریان (x) امتداد دارد.

- مولفه‌های اغتشاشی بسیار کوچک هستند، به طوری که از جمله های غیر خطی این مولفه‌ها می‌توان صرف نظر کرد.
- مولفه‌های متوسط ، پاسخ های مستقل از زمان معادله‌ی ناویر - استوکس هستند.

بنابراین، معادله های حرکت و پیوستگی خطی شده عبارت اند از:

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \underline{u}'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} \underline{i} = \quad (3)$$

$$-\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \underline{u}',$$

$$\nabla \cdot \underline{u}' = 0. \quad (4)$$

با فرض اینکه مولفه‌های اغتشاش هابی سرعت و فشار به صورت موج های حرکتی باشند، داریم:

$$\underline{u}'(x, y, t) = \hat{u}(y) \cdot \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}, \quad (5)$$

$$p'(x, t) = \hat{p}(y) \cdot \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}. \quad (6)$$

مقدارهای ثابت $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ و $\omega = \omega_r + i\omega_i$ در واقع عددهای مختلط هستند. α_r عدد موج ، ω_r فرکانس یا سرعت زاویه‌ای اغتشاش های، α_i نرخ رشد مکانی^۱ و ω_i نرخ رشد زمانی^۲ است.

بدون از دست دادن جامعیت مسأله، می‌توان فرض کرد $\omega_r > 0$. اگر $\alpha_i = 0$ فرض شود، آنگاه اغتشاش های فقط تابعی از y و t خواهد بود، که به آن اغتشاش های زمانی گفته می‌شود. اگر $\omega_i = 0$ در نظر گرفته شود، به آن اغتشاش مکانی، اطلاق می‌شود. برای حالت اغتشاش های

1. Spatial

2. Temporal

• $\Lambda_U, \Lambda_{U'}$ ماتریس های قطری بوده که مقادیرهای U, U'' در مختصات گسسته y روی قطر اصلی آنها قرار دارد.

یک فرض ساده کننده در معادله‌ی اور-سامرفیلد که عدد رینولدز بسیار بزرگ باشد ($Re \rightarrow \infty$) مربوط به جریان غیر لزج است، به عبارت دیگر موقعی که ($v \rightarrow 0$)، در این صورت با حذف جمله های مربوط به ویسکوزیته در معادله‌ی اور-سامرفیلد به معادله (۲۳) که به معادله‌ی رایلی مشهور است، خواهیم رسید:

$$\varphi'' - \left(\frac{U''}{U-c} + \alpha^2 \right) \varphi = 0 \quad (23)$$

این معادله از مرتبه‌ی دو است. لذا برای حل تنها به دو شرط مرزی نیاز داریم.

۳-۱ روشهای حل معادله پایداری

همان طور که می‌دانیم معادله‌ی اور-سامرفیلد برای محاسبه پایداری جریان های لزج مورد استفاده قرار می‌گیرد، برای حل این معادله مقدار ویژه، دو روش وجود دارد.

الف: پایداری زمانی

ب: پایداری مکانی

الف - پایداری زمانی^۱

اگر رشد اغتشاش های در زمان در نظر گرفته شود در این صورت طول موج اغتشاش های $\lambda = 2\pi/\alpha$ یک مقدار حقیقی و معلوم است. در این حالت معادله اور-سامرفیلد برای هر جفت از عددهای Re و α به یک معادله‌ای که دارای تابع ویژه $v(y)$ و مقادیرهای ویژه $c = c_r + ic_i$ است، تبدیل می شود. در این صورت مسأله مقدار ویژه به صورت پارامتری زیر معرفی می شود.

$$f(Re, U, \alpha, c_i, c_r) = 0 \quad (24)$$

که در آن c_r سرعت فازی اغتشاش های و c_i نشانگر نرخ رشد یا دمپ شدن اغتشاش هاست در این صورت داریم:

$$\hat{u}(y) = \partial \varphi / \partial y, \quad (15)$$

$$\hat{v}(y) = -i\alpha \varphi, \quad (16)$$

$$\hat{p}(y) =$$

$$U' \varphi - (U-c) \varphi' - \frac{1}{\alpha Re} (\varphi''' - \alpha^2 \varphi'). \quad (17)$$

با قرار دادن تابع جریان در معادله‌ی اور-سامرفیلد (۱۱) خواهیم داشت:

$$(U-c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = \frac{-i}{\alpha Re} [\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi] \quad (18)$$

از آنجایی که معادله‌ی اور - سامرفیلد یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی چهار است، حل آن احتیاج به اعمال چهار شرط مرزی دارد، که این شرایط مرزی برای جریان لایه مرزی به صورت عدم وجود اغتشاش و گرادین اغتشاش در مرز جریان آزاد ($+\infty$) و مرز صلب (0) است. از این رو شرایط مرزی دیریشله و نیومن برای معادله‌ی اور - سامرفیلد در نظر گرفته می‌شود.

$$\varphi(+\infty) = \varphi(0) = 0 \quad (19)$$

$$\varphi'(+\infty) = \varphi'(0) = 0 \quad (20)$$

۳ - گسسته سازی معادله‌ی اور - سامرفیلد

فرم ماتریسی معادله‌ی اور - سامرفیلد به صورت زیر خواهد بود:

$$A \varphi = \tilde{c} \quad (21)$$

که:

$$A = (D^2 - \tilde{c} \dots \dots \dots \tilde{c}) \quad (22)$$

$$\Lambda_{U''} + \frac{i}{\alpha Re} (D^2 - \tilde{c} \dots \dots \dots \tilde{c})$$

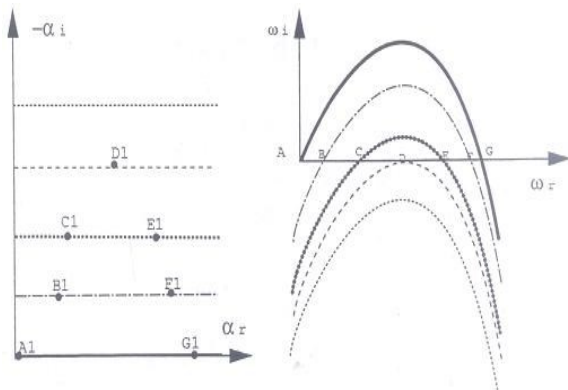
معادله‌ی (۲۱) یک مسأله مقدار ویژه است، که در آن:

- I ماتریس واحد از مرتبه‌ی N است.
- N تعداد نقاطی که برای گسسته سازی در جهت y استفاده شده است.

¹ . Temporal Stability

مکانی می‌توان استفاده کرد. ابتدا بایستی معادله‌ی اور-سامرفیلد زمانی برای عدد موج های مختلط متفاوت حل شود و فرکانس زاویه‌ای (ω) محاسبه شود. بنابراین، از یک نگاشت در ناحیه‌ای از فضای مختلط α (دوتایی‌های (α_r, α_i)) و ناحیه‌ای در فضای مختلط ω (دوتایی‌های (ω_r, ω_i)) استفاده کنیم باید توجه شود $\omega = \alpha c$ ، که در آن c شامل N مقدار ویژه متفاوت است.

نمای شماتیک از این نگاشت در شکل ۲ نشان داده شده است [۵]. با توجه به هر α ، یک حل زمانی معادله‌ی اور-سامرفیلد برای ω وجود دارد. حل معادله‌ی مکانی اور-سامرفیلد (مقدار ویژه) در واقع یافتن عدد موجهای مکانی وابسته به فرکانس‌هایی با قسمت موهومی صفر است. با توجه به معادله‌ی (۵) عدد موجی که مولفه موهومی آن از همه کوچکتر باشد (نقطه D_1 در شکل ۲ معرف موجی است که از همه دیرتر مستهلک می‌شود. وابستگی متقارن بین α های متفاوت $(A, B, C, D, E, F, \Phi, \omega)$ و $(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$ در شکل ۲ تشریح شده است. بنابراین، در پی مشخص شدن Re ، $U(y)$ و فرکانس، می‌توان به سادگی عدد موج مکانی را به دست آورد. بردارهای ویژه که وابسته به مقدارهای ویژه مکانی هستند نیز به راحتی به دست می‌آیند.



شکل ۲ نگاشت بین صفحه های مختلط α و ω [۵].

۳-۳ حل بردارهای ویژه سرعت

با استفاده از فرضیه های جریان موازی، وجود اغتشاش های سرعت و فشار به صورت موج های حرکتی (معادله های

$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp\{i\alpha(x-ct)\} \quad (25)$$

با توجه به اینکه ترم $\exp(i\alpha x)$ یک ترم پریودیک است:

$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp(\alpha c_i t + \alpha c_r t) \quad (26)$$

و از آن نتیجه می‌گیریم که رابطه‌ی رشد اغتشاش‌ها c_i و c_r به صورت زیر است:

$$c_i > 0 \Leftarrow \text{رشد اغتشاش های نسبت به زمان و ناپایداری}$$

$$c_i = 0 \Leftarrow \text{حالت خنثی}$$

$$c_i < 0 \Leftarrow \text{دمپ اغتشاش های نسبت به زمان و پایداری}$$

ب- پایداری مکانی^۱

اگر رشد اغتشاش‌ها در مکان در نظر گرفته شود در این صورت فرکانس امواج یک مقدار حقیقی و معلوم می‌شود و عدد موج یک مقدار مختلط است.

$$f(Re, U, \omega, \alpha_r, \alpha_i) = 0 \quad (27)$$

$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp\{i\alpha(x-ct)\} \quad (28)$$

که در آن ω معلوم و $\exp(i\alpha_r x)$ یک ترم پریودیک است در نتیجه داریم:

$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp(i\alpha_r x + i\alpha_i x) \quad (29)$$

و از آن نتیجه می‌گیریم که رابطه‌ی رشد اغتشاش‌های α_i و α_r به صورت زیر است:

$$\alpha_i < 0 \Leftarrow \text{رشد امواج نسبت به مکان و ناپایداری}$$

$$\alpha_i > 0 \Leftarrow \text{دمپ امواج و پایداری}$$

$$\alpha_i = 0 \Leftarrow \text{حالت خنثی}$$

۳-۲ حل مسأله مقدار ویژه

همان طور که در بخش قبلی مشخص شد، هیچ حل مستقیمی برای مسأله مقدار ویژه مکانی وجود ندارد و این به علت آن است که امکان ارزیابی ماتریس A در معادله‌ی (۲۱) وجود ندارد. اما از نگرش نگاشت مختلط برای حل

¹ . Spatial Stability

تئوری ماتریس تفاضل چبیشف

برای هر $N \geq 1$ ماتریس دیفرانسیل طیفی چبیشف D_N با $(N+1) \times (N+1)$ سطر و ستون که از 0 تا N نشان داده می‌شود، به صورت زیر است :

$$D_{ii}^1 = -\frac{\eta_i}{2(1-\eta_i^2)}$$

$$D_{ij}^1 = -\frac{c_j(-1)^{i+j}}{c_i(\eta_j - \eta_i)} \quad (33)$$

$$D_{ij}^k = (D_{ij}^1)^k$$

if $i \neq j$ with $c_0 = 2, c_i = 1$

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2+1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{2(-1)^j}{1-x_j} & \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline & \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1+x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1+x_j} & \frac{2N^2+1}{6} \\ \hline \end{array}$$

۳-۴-۱ روش نگاشت طیفی^۵

عملگرهای مشتق ارایه شده فقط در بازه $\eta = [0, 1]$ تعریف شده‌اند، ولی چون قلمرو فیزیکی لایه مرزی $[0, L_y]$ است، لذا نیاز به یک تغییر متغیر و یا به عبارتی، نگاشتی برای تبدیل قلمرو فیزیکی به قلمرو محاسباتی $[0, 1]$ داریم.

نگاشت مورد نظر باید ویژگی هاس زیر را داشته باشد :

۱- نگاشت باید یک به یک باشد، یعنی خطوط شبکه

هم خانواده نباید یکدیگر را قطع کنند.

(۵) و (۶)، بردارهای ویژه سرعت و فشار دو بُعدی، به طور مستقیم با ارزیابی سمت راست معادله های (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) محاسبه می‌شود. در این پژوهش محاسبه های پایداری خطی در فضای فیزیکی η ، با استفاده از روش نگاشت طیفی انجام گرفته است، که جزییات آن در بخش بعدی تشریح می‌شود.

۳-۴ روش طیفی^۱

روش طیفی به همراه روش تفاضل محدود و المان محدود، یکی از سه روش اصلی در حل معادله های دیفرانسیل معمولی و جزئی است. اگر حلی برای یک معادله ی دیفرانسیل معمولی یا جزئی با دقت بالا در یک محدود محاسباتی ساده^۲ با داده‌های هموار^۳ نیاز باشد، به طور معمول روش طیفی بهترین گزینه است. از مزایای روش طیفی دقت بسیار بالای این روش در مقایسه با روش های المان محدود و یا تفاضل محدود است.

مرحله نخست در روش طیفی این است که یک تابع تخمین انتخاب کنیم. انتخاب سری های فوریه معمول است، اما اگر تابع حقیقی، متناوب نباشد با مشکل مواجه می‌شویم. بنابراین، تخمین یک چند جمله‌ای پیشنهاد بهتری است. در این مورد چند جمله‌ای «چبیشف»^۴ یک انتخاب عمومی است. شکل چند جمله‌ای چبیشف به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\eta) \quad (30)$$

که در آن T_n به وسیله معادله $(3-3)$ به دست می‌آید :

$$T_n(\eta) = \cos(n/\cos(\eta)) \quad (31)$$

چند جمله‌ای های چبیشف در بازه $[0, 1]$ به ازای جمیع نقاط η_i قرار می‌گیرد.

$$\eta_i = \cos(\pi i / 2N) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

1. Spectral method
2. Simple computational domain
3. Smooth data
4. Chebyshev polynomial

5. Mapped spectral method

$$\therefore D_{ij}^3(y) = D_{ij}^3(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^3 + \quad (37)$$

$$3D_{ij}^2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3}$$

$$\therefore D_{ij}^4(y) = D_{ij}^4(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^4 +$$

$$D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} + 6D_{ij}^3(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \quad (38)$$

$$D_{ij}^2(\eta) \left[3 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right]$$

حال مسأله مقدار ویژه (۲۱) با استفاده از مشتق‌های پاره‌ای بالا حل می‌شود. شرایط مرزی در دامنه محاسباتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad (39)$$

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \quad (40)$$

حال مسأله به طور کامل محدود می‌شود و تحلیل پایداری خطی در یک پروفیل سرعت داده شده، می‌تواند انجام گیرد.

۴ - نتایج پایداری

در این پژوهش پروفیل سرعت جریان اصلی در تجربه پایداری خطی مکانی لایه مرزی دو بُعدی، به دو صورت یک جمله‌ای و چند جمله‌ای زیر در نظر گرفته شده است:

$$U(y) = 0.332y - 0.00023y^4 + 1.998 \times 10^{-3}y^7 - 1.571 \times 10^{-7}y^{10} + 1.13 \times 10^{-9}y^{13} \quad (41)$$

و

$$U(y) = \begin{cases} 1.8y - 1.9683y^4 & \left(0 \leq y \leq \frac{4}{9} \right) \\ 1 - 0.81(1-y)^2 & \left(\frac{4}{9} \leq y \leq 1 \right) \\ 1 & (y \geq 1) \end{cases} \quad (42)$$

در شکل ۴ می‌توان مقایسه بین قسمت حقیقی تابع ویژه در $\varphi(y)$ ، برای حالتی که $\text{Re} = 1000$ ، $\alpha = 0.23$ را

۲- از نقطه نظر عددی، در مناطقی که گرادیان‌های

شدید جریان وجود دارد، بایستی توزیع نقاط

شبکه، متراکم، هموار و اعوجاج شبکه کم باشد.

۳- خطوط شبکه باید متعامد و یا به تقریب متعامد

باشند.

تبدیل جبری مورد استفاده در این پژوهش، به صورت

معادله‌ی (۳۴) است که دامنه‌ی فیزیکی $(0 \leq y \leq L_y)$ را

به محدوده محاسباتی $(0 \leq \eta \leq 1)$ تصویر می‌کند.

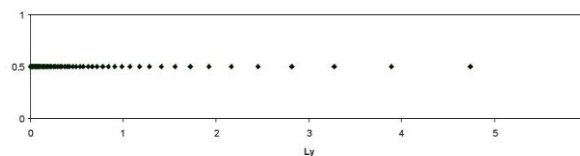
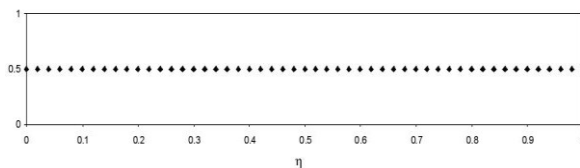
$$y = (L_y y_0 \eta) / (y_0 + L_y (1 - \eta)) \quad (34)$$

که در این رابطه‌ی y_0 پارامترنگاشت است و میزان کشیدگی را تعیین می‌کند. در $y_0 \rightarrow \infty$ ،

می‌دهد. در شکل ۳ می‌توانیم توزیع شبکه را روی شبکه

کشیده شده با $y_0 = 0.5$ ، $L_y = 6$ ، $N_y = 50$ با نگاشت

ذکر شده، مشاهده کرد.



شکل ۳ مقایسه‌ی قلمروهای فیزیکی و محاسباتی

تبدیل‌های معادله‌های دیفرانسیل، برای نگاشت محدوده فیزیکی به محدوده محاسباتی طبق قانون‌های زنجیره‌ای

برای مشتقات پاره‌ای به صورت زیر است:

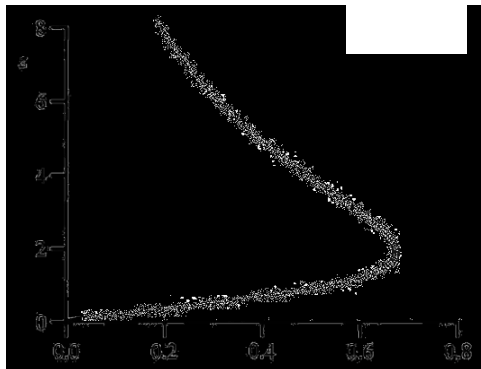
$$\therefore \frac{\partial \eta}{\partial y} = f'(y) \quad (35)$$

$$\therefore D_{ij}^1(y) = D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\therefore D_{ij}^2(y) = D_{ij}^2(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad (36)$$

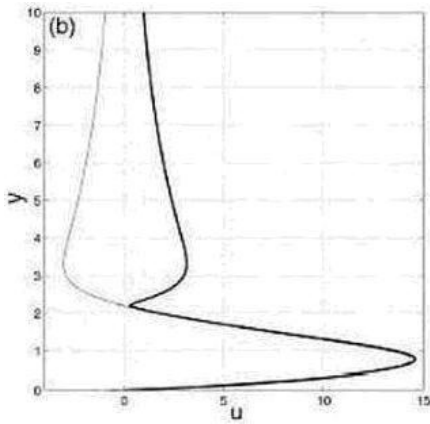
مشاهده کرد. نتیجه‌های به دست آمده (برای $Re=1000$, $\alpha=0.23$) با نتیجه‌های درزین^۱ [۷] (۱۹۸۱) مقایسه شده است. نتیجه‌های شبیه سازی طیفی برای پروفیل سرعت معادله های (۴۱) و (۴۲) به طور کامل بر هم منطبقند. در شکل های ۵ و ۶ مولفه سرعت در جهت جریان (u) و عمود بر جریان (v) در حالتی که $Re=500$, $\alpha=0.2$ ، نشان داده شده‌اند. نتیجه های به دست آمده با نتیجه های اشمیت^۲ و هنینگسون^۳ [۷] مقایسه شده‌اند. که درستی و دقت روش حل استفاده شده را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که پروفیل‌های سرعت تابع ویژه، در مرز آزاد صفر، و در فاصله کمی از مرز دارای بیشترین تغییرهاست.

اختلاف اندکی که بین نتیجه‌های به دست آمده از شبیه سازی با نتیجه‌های منتشر شده در شکل های ۵ و ۶ وجود دارد، به دلیل تفاوت در پروفیل سرعت انتخابی برای جریان لایه مرزی است. در هر شبیه سازی مکانی جریان لایه مرزی با نیروهای اغتشاشی تصادفی در مرز ورودی، مشخص بودن سرعت در جهت متقاطع جریان در شرایط مرزی ورودی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا می‌بایستی سرعت در جهت متقاطع جریان در مرزها صفر باشد و یا به عبارت دیگر شرایط حل پذیری ارضاء شود، بنابراین، هر نیروی اغتشاشی که از معادله‌ی اور-سامرفیلد به دست می‌آید، در صورتی که از مولفه سرعت متقاطع جریان (v) به عنوان نیرو استفاده کند می‌تواند برای مشخص کردن مرز ورودی دامنه محاسباتی به کار رود. در شبیه سازیهای مستقیم عددی لایه مرزی از v به عنوان نیروی اغتشاشی استفاده می‌شود.

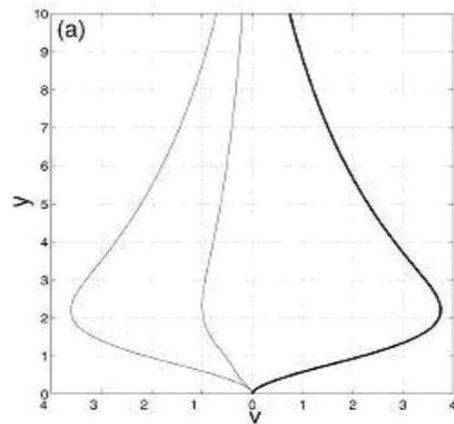


شکل ۴ مقایسه بین قسمت حقیقی تابع ویژه $\varphi(y)$ ، برای ($Re=1000$, $\alpha=0.23$). خطوط تو پر نتیجه های Drazin (۱۹۸۱) [۶] و نتیجه های شبیه سازی طیفی برای پروفیل سرعت معادله های (۴۱) و (۴۲)

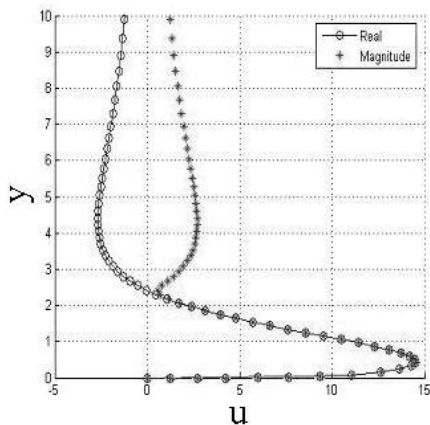
1. Drazin
2. Schmid
3. Henningson



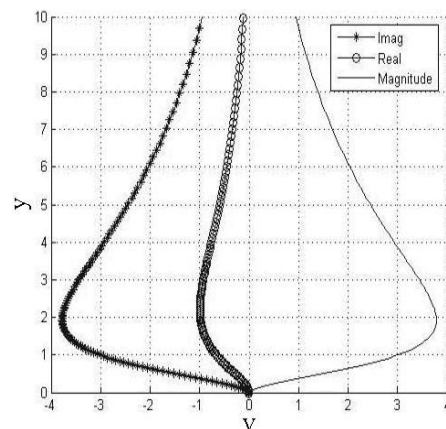
نتیجه های Schmid and Henningson (۲۰۰۱) [۷]



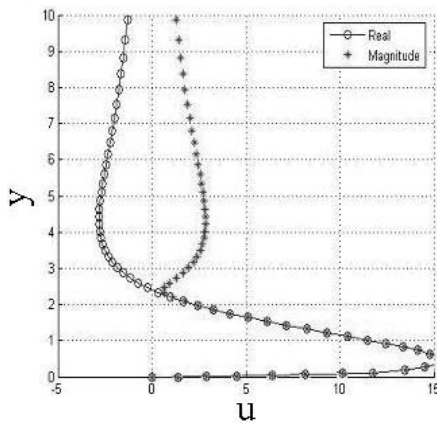
نتیجه های Schmid and Henningson (۲۰۰۱) [۷]



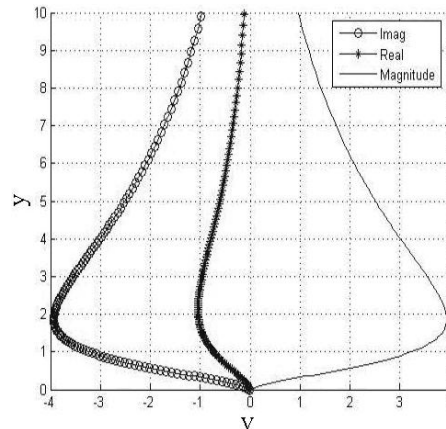
شبیه سازی طیفی برای پروفیل سرعت معادله‌ی (۴۱)



شبیه سازی طیفی برای پروفیل سرعت معادله‌ی (۴۱)



شبیه سازی طیفی برای پروفیل سرعت معادله‌ی (۴۲)



شبیه سازی طیفی برای پروفیل سرعت معادله‌ی (۴۲)

شکل ۶ مقایسه بین مولفه های سرعت U در

$$\alpha = 0.2, \text{ Re} = 500$$

شکل ۵ مقایسه بین مولفه های سرعت V در

$$\alpha = 0.2, \text{ Re} = 500$$

۵- نتیجه گیری

تحلیل پایداری خطی در جهت اعمال اغتشاش روی پروفیل سرعت متوسط در مرز ورودی دامنه محاسباتی جریان لایه مرزی دو بُعدی انجام شد. با استفاده از یک نگاشت، دامنه فیزیکی جریان لایه مرزی در جهت عمود بر جریان به دامنه محاسباتی واحد تطبیق داده شد. از روش نگاشت طیفی برای حل مسأله مقدار ویژه با فرض موازی بودن جریان استفاده شد. مدل سازی عددی معادله‌ی اور-سامرفیلد به طور کامل شرح داده شد. توابع ویژه سرعت به دست آمده از معادله اور-سامرفیلد شرایط لازم برای شبیه سازی مستقیم عددی جریان لایه مرزی را ارضاء می‌کنند.

۶- مراجع

- [1] H.Schlichting, Boundary Layer Theory, Mc Graw Hill, 1979.
- [2] G.H.Schubauer, and H.F.Skramstad, Laminar boundary layer oscillations and the stability of laminar flow. J.Aero. Sci. 14, pp. 69-78, 1947.
- [3] T. Herbert, Secondary instability of boundary layers. Ann. Rev. Fluid Mech.20, pp. 487-526, 1988.
- [4] Y. S. Kachanov, Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 26, p. 411, 1994.
- [5] M.J. Maghrebi, A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially- Developing Three-Dimensional Plane Wake, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.
- [6] P. G. Drazin and W. H. Reid, "Hydrodynamic Stability", Cambridge Univ. Press, London, 1981.
- [7] P.J. Schmid and D.N. Henningson, "Stability and Transition in Shear Flows", Springer-Verlag, 2001.